Analyse pour l'informatique **Feuille d'exercices N°3**
2013-2014

Dans chaque exercice, il est recommandé d'esquisser le graphe de la fonction à étudier.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π- périodique paire définie par $f(t) = 1$ si $t \in [0, \pi/2]$ et $f(t) = -1$ si $t \in]\pi/2, \pi]$.

1. Calculer la série de Fourier et étudier ses propriétés de convergence.
2. En déduire que

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}, \quad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π- périodique impaire définie par $f(t) = t$ si $t \in [0, \pi/2]$ et $f(t) = \pi - t$ si $t \in]\pi/2, \pi]$.

1. Calculer la série de Fourier et étudier ses propriétés de convergence.
2. En déduire que

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Exercice 3. Soit $a > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \frac{1}{cha + \cos t}$.

1. Montrer que f est 2π- périodique, paire et de classe C^1.
2. Quelle est la propriété de convergence de la série de Fourier de f ?
3. En utilisant la décomposition

$$f(t) = \frac{1}{\mathrm{sh}a} \left(\frac{1}{1 + e^{-a}e^{it}} - \frac{e^{-a}e^{-it}}{1 + e^{-a}e^{-it}} \right)$$

et les séries géométriques, montrer que f est la somme d'une série trigonométrique normalement convergente de fonctions cosinus.

4. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{\mathrm{ch}a + \cos t} dt = \frac{\pi}{\mathrm{sh}a} (-1)^n e^{-na}.$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \sup(\sin t, 0)$.

1. Déterminer la période de f et montrer qu'elle est continue et C^1 par morceaux.
2. Quelle est la propriété de convergence de la série de Fourier de f ?
3. Calculer la série de Fourier de f puis sa somme.
4. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{2 - \pi}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

5. A l'aide des résultats précédents, montrer que, pour tout $x \in R$,

$$|\sin x| = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{4n^2 - 1}.$$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x - E(x)$ ($f(x)$ est la partie fractionnaire de x)

1. Montrer que le coefficient c_n de la série de Fourier de f est donné par $c_n = -\frac{1}{2in\pi}$ si $n \neq 0$ et $c_0 = \frac{1}{2}$.
   En déduire la série de Fourier en base réelle de f puis déterminer sa somme.
2. En déduire la valeur de la somme de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}.$$

   pour $t \in]0, \pi[$.

Exercice 6. Soit $s \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π- périodique définie par $f(x) = e^{sx}$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.

1. Montrer que la série de Fourier en base complexe de f est

$$S(f) : \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(s\pi)}{\pi} \frac{(-1)^n e^{inx}}{s-n}.$$

   En déduire la série de Fourier en base réelle de f puis déterminer sa somme.
2. En considérant les points $x = 0$ puis $x = \pi$, montrer que

$$\frac{\pi}{\sin s\pi} = \frac{1}{s} + 2s \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{s^2 - n^2} \right)$$

   et

$$\pi \cot(s\pi) = \frac{1}{s} + 2s \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s^2 - n^2} \right).$$

3. Soit x tel que $|x| < \pi$. En écrivant $\cos sx = \frac{1}{2}(e^{isx} + e^{-isx})$ et $\sin sx = \frac{1}{2i}(e^{isx} - e^{-isx})$, montrer que

$$\cos sx = \frac{sin(s\pi)}{s\pi} + \frac{2\sin(s\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n s \cos nx}{s^2 - n^2}$$

   et

$$\sin sx = \frac{2\sin(s\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin nx}{s^2 - n^2}.$$