Probabilités pour l'informatique **Feuille d'exercices N°2**
2013-2014

Chaque fois que c'est possible, il est recommandé de préciser clairement l'espace des réalisations Ω ainsi que les parties de cet espace associées aux événements indiqués. Lorsque Ω est fini et le choix de la probabilité uniforme sur Ω est justifié, on pourra appliquer la formule $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$ pour le calcul de la probabilité de l'événement A.

Exercice 1. On tire, simultanément et au hasard, 13 cartes d'un jeu de cartes bien battu. Calculer la probabilité d'obtenir : a) Exactement un roi. b) Au moins un roi

Exercice 2. Une personne A lance au hasard six fois un dé et gagne si elle obtient au moins un six et une personne B lance au hasard douze fois un dé et gagne si elle obtient au moins deux six. Calculer la probabilité p_A (resp. p_B) de gain de A (resp. B) et comparer les valeurs obtenues.

Exercice 3. Lequel des deux événements suivants est plus probable : Obtenir au moins une fois un six en 4 lancers d'un dé ou obtenir au moins une fois un double six en 24 lancers de deux dés ?

Exercice 4. On lance au hasard trois dés équilibrés.

1. Quelle est la probabilité d'avoir un six sachant que les points amenés sont tous différents.
2. Calculer la probabilité que la somme des points soit supérieur ou égale à 8 sachant qu'un seul des dés a amené 3.

Exercice 5. Trois joueurs lancent successivement et à tour de rôle un dé. La partie s'arrête lorsque l'un des joueurs gagne en amenant un six. Le six apparaît avec une probabilité p.

1. Calculer la probabilité pour que la partie s'arrête au r-ième lancer.
2. Calculer la probabilité de gain de chaque joueur.

Exercice 6. On lance 6 fois de manière identique et indépendante une pièce de monnaie équilibrée. Une réalisation ω de cette expérience est donc une suite de 6 lettres F ou P indiquant le résultat obtenu à chaque lancer. Pour tout couple (n, k) d'entiers tels que $n \geq 1, k \geq 0$ et $n + k \leq 5$, on note $A(n, k)$ l'événement "On obtient F au lancer N° j pour tout entier j tel que $n \leq j \leq n + k$ et on obtient P au lancer N° n + k + 1".

1. Quel est le nombre total des événements $A(n, k)$?
2. Soit $\omega = FFPFPF$. Indiquer un événement $A(n, k)$ tel que $\omega \in A(n, k)$ et un événement $A(n', k')$ tel que $\omega \notin A(n', k')$.
3. Calculer $P[A(n, k)]$.
4. Parmi les événements $A(n, k)$, citer deux événements compatibles et indépendants.
5. Parmi les événements $A(n, k)$, citer deux événements incompatibles et non indépendants.

Exercice 7. On tire au hasard et sans remise 3 boules parmi 20 numérotées de 1 à 20. Quelle est la probabilité que l'une des boules tirées porte un numéro supérieur ou égal à 17 ?

Exercice 8. Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires. On effectue deux tirages au hasard et sans remise d'une boule de l'urne. Sachant que la deuxième boule est noire, quelle est la probabilité que la première soit blanche?

Exercice 9. Une urne contient des jetons numérotés de 1 à N. On effectue des tirages successifs avec remise d'un jeton de l'urne jusqu'à obtenir le nombre N.

1. Calculer la probabilité p_r pour que le nombre de tirages soit r.
2. Calculer la probabilité q_N pour que le nombre de tirages soit $\leq N$. Calculer $\lim_{N\to\infty} q_N$.

Exercice 10. Dans une urne contenant 3 jetons portant les numéros 1, 2 et 3, on effectue une suite de tirages au hasard et avec remise d'un jeton.

1. Soit $n \geq 2$. Avec quelle probabilité p_n le n-ème tirage fournit-il un nombre strictement supérieur à tous les précédents ?
2. Déterminer la valeur de p_1 pour que les nombres $p_n, n \geq 1$, définissent une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

Exercice 11. Dans un groupe de n individus, on suppose que les dates des anniversaires sont réparties au hasard dans les 365 jours de l'année. Calculer la probabilité pour qu'au moins deux d'entre eux aient leur anniversaire le même jour.

Exercice 12. Quatre voyageurs A, B, C et D, n'ayant pas réservé leur place, se répartissent au hasard dans les voitures 1, 2, et 3 d'un train.

1. Quelle est la probabilité que les quatre voyageurs montent dans la même voiture ?
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un voyageur dans chaque voiture ?
3. On sait que, dans chaque voiture, il y a deux places libres. Quelle est la probabilité que tous les voyageurs trouvent une place assise ?

Exercice 13. $n-2$ voitures se garent au hasard sur un parking disposant de n places alignées ($n \geq 2$). Quelle la probabilité que les deux places libres soient côte à côte ?

Exercice 14. On répartit au hasard 10 tableaux noirs entre 4 écoles. Quelle est la probabilité que chaque école reçoive au moins un tableau ?

Exercice 15. Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes de risques R1, R2, R3 : les bons risques, les risques moyens et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R1, 50% pour R2 et 30% pour R3. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accrochage au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0,05, 0,15 et 0,30.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accrochage dans l'année ?
2. Si M. Martin a eu un accrochage cette année, quelle est la probabilité qu'il soit du type R1?

Exercice 16. Une machine industrielle comprend trois organes de fonctionnement. Si l'un de ces organes présente une défaillance, la machine tombe en panne. Sachant que les défaillances possibles de ces organes sont indépendantes et que les probabilités de défaillance sont respectivement 0,02, 0,05 et 0,1, calculer la probabilité que la machine soit en panne.

Exercice 17. Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre quatre itinéraires : A, B, C et D. La probabilité qu'il choisisse A (respectivement B, C) est 1/3 (respectivement 1/4, 1/12). La probabilité d'arriver en retard en empruntant le chemin A (resp. B, C) est 1/20 (resp. 1/10, 1/5). En empruntant D il n'est jamais en retard.

1. Calculer la probabilité que l'élève arrive en retard.
2. Un jour , l'élève est en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire C.