Université Claude Bernard Lyon 1 — PCSI L2 UE MATH4
Année 2015-2016 — 17 mars 2016
Printemps 2016

Contôle Continu 2 - Corrigé

Exercice 1

1. $(fH) * (gH)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)H(x-y)g(y)H(y)dy = \int_{0}^{\infty} f(x-y)H(x-y)g(y)dy$
Si $x < 0$ alors $H(x-y) = 0$ pour tout $y \geq 0$. Donc l'intégrand est 0. Donc l'intégrale est 0.
Si $x \geq 0$ alors $H(x-y) = 0$ pour tout $y > x$ et $H(x-y) = 1$ pour tout $0 \leq y \leq x$. Donc
$\int_x^{\infty} f(x-y)H(x-y)g(y)dy = 0$ et $\int_0^{\infty} f(x-y)H(x-y)g(y)dy = \int_0^x f(x-y)g(y)dy$.

2. On applique le resultat de 1.
(a) $f_a * f_a(x) = 0$ si $x \leq 0$. Soit $x \geq 0$. Alors $f_a * f_a(x) = \int_0^x e^{x-y}e^y dy = e^x \int_0^x dx = xe^x$.
(b) $s_\omega * H(x) = 0$ si $x \leq 0$. Soit $x \geq 0$. Alors
$s_\omega * H(x) = \int_0^x \sin(\omega(x-y))dy = \left[\frac{1}{\omega}\cos(\omega(y-x))\right]_0^x = \frac{1-\cos(\omega x)}{\omega}$.

Exercice 2

(a) $\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx}e^{ax}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)dx = \int_0^1 e^{(-ip+a)x}dx = \left[\frac{e^{(-ip+a)x}}{-ip+a}\right]_0^1 = \frac{e^{-ip+a}-1}{-ip+a}$

(b) On utilise $\mathcal{F}(xf(x))(p) = i\frac{d}{dp}\mathcal{F}(f)(p)$. Donc, avec le resultat de (a) on obtient
$\hat{f}(p) = i\frac{d}{dp}\frac{e^{-ip+a}-1}{-ip+a} = \frac{e^{-ip+a}(-ip+a-1)+1}{(-ip+a)^2}$

(c) Le sinus cardinal $\frac{\sin(p)}{p}$ est la transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$. Donc
$\mathcal{F}^{-1}(\frac{\sin(p)}{p})(x) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)$ pour tout x qui est point de continuité de $\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$, c.à.d. tout $x \neq \pm\frac{1}{2}$. Comme $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\hat{f})(-x)$ nous avons
$\mathcal{F}(\frac{\sin(x)}{x})(p) = 2\pi\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(p)$ si $p \neq \pm\frac{1}{2}$. (On ignore le resultat pour $p = \pm\frac{1}{2}$.)

Exercice 3 On définit $F(x)$ par l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}dt$.

1. On coupe l'intégrale en deux : Pour l'intégrale de 0 à 1 on utilise l'équivalence en 0 $\frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{xt}{t(1+t^2)} = \frac{x}{1+t^2}$. Comme $t \mapsto \frac{x}{1+t^2}$ est borné $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}dt$ est convergente.
   Pour l'intégrale de 1 à $+\infty$ on utilise que $|\arctan(u)| \leq \frac{\pi}{2}$ et $\frac{1}{t(1+t^2)} \leq \frac{1}{t^3}$. D'après le critére de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}dt < +\infty$ et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}dt \leq \frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}dt < +\infty$ est aussi convergente.
2. On échange la dérivée avec l'intégrale. Comme $\arctan'(u) = \frac{1}{1+u^2}$ on obtient
   $F'(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{d}{dx}\frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}dt = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}dt.$
   Pour justifier l'échange on trouve une dominante g. Soit $g(t) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{t(1+t^2)}$.
   Alors $g(t) \geq \left|\dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\right|$ et $\displaystyle\int_0^\infty g(t)dt < +\infty$ (d'après 1. avec $x = 0$). L'existence d'une dominante guarantie qu'on peut échanger l'intégrale avec la dérivée et que F' est continue.
3. Avec l'indication donné on a $F'(x) = \dfrac{1}{x^2-1}\left(\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^2t^2}dt - \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}dt\right)$, pourvu $x \neq \pm 1$. Avec le changement de variable $s = xt$ on a, si $x > 0$,
   $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^2t^2}dt = \int_0^\infty \frac{x^2}{1+s^2}\frac{1}{x}ds = x\frac{\pi}{2}$ (les bornes ne changent pas, car $x > 0$). Donc
   $F'(x) = \dfrac{1}{x^2-1}\left(\dfrac{x\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2(x+1)}$ pour $x \geq 0$. (En effet, le resultat est vrai pour $x = 0$ par calcul direct, et il est vrai pour $x = 1$ en conséquence de la continuité de F'.)
4. Une primitive de $\frac{1}{x+1}$ sur $x > -1$ étant $\ln(x+1)$ nous obtenons
   $F(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(x+1) + C.$
   Nous déterminons C par evaluation en 0 : Comme $\arctan(0) = 0$ on a $F(0) = 0$ et donc $C = 0$.