Contôle Continu 2 (90 minutes)

Exercice 1 Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions et $H = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}$ la fonction de Heavyside.

1. Montrer que

$$(fH) * (gH)(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy \quad \text{si } x \geq 0 \quad \text{et} \quad (fH) * (gH)(x) = 0 \quad \text{si } x < 0$$

   (on admet que les intégrales existent).

2. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $f_a(x) = e^{ax}H(x)$ et $s_\omega(x) = \sin(\omega x)H(x)$. Calculez

   (a) $f_a * f_a$ $\quad (b)$ $s_\omega * H$

Exercice 2 Soit $a \in \mathbb{C}$ et $\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ la fonction indicatrice sur l'intervalle $[0,1]$. Calculez la transformée de Fourier des fonctions

$$(a)\ f(x) = e^{ax}\mathbf{1}_{[0,1]}(x) \quad (b)\ f(x) = xe^{ax}\mathbf{1}_{[0,1]}(x) \quad (c)\ f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Exercice 3 On définit $F(x)$ par l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}dt$.

1. En utilisant que $\arctan(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, montrer que l'intégrale est convergente pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $F'(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}dt$.
3. En déduire que $F'(x) = \dfrac{\pi}{2(x+1)}$ pour $x \geq 0$.
4. Déterminer par intégration $F(x)$, $x \in [0, \infty[$.

Indications

- *Le produit de convolution des fonctions* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *est* $f * g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$
- *La transformée de Fourier d'une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *est* $\hat{f}(p) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} f(x)dx$
- *La transformée de Fourier inverse de* $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *est* $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx}\hat{f}(p)dp$
- *La décomposition en éléments simples permet d'écrire*
  $\dfrac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \dfrac{1}{x^2-1}\left(\dfrac{x^2}{1+x^2t^2} - \dfrac{1}{1+t^2}\right)$, *pour* $x \neq \pm 1$
- *On a* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$