

Contrôle Continu 3 (45 minutes)

Exercice 1 Transformation de Laplace. *Rappel* : $\mathcal{L}(e^{at}t^n)(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $a \in \mathbb{C}$

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante : $Y(s) = \frac{2s+1}{(s-2)(s^2+1)}$.

2. En utilisant la transformée de Laplace, résoudre alors l'équation différentielle :

$$y''(x) - \frac{5}{2}y'(x) + y(x) = -\frac{5}{2}\sin(x), \text{ avec les conditions : } y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

Exercice 2 Calculer les limites suivantes au sens des distributions.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{f_n}$ où $f_n(x) = \frac{n}{2}e^{-n|x|}$

2. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta_h - \delta_{-h}}{2h}$

Exercice 3 Dérivation des distributions.

1. Calculer la dérivée au sens de distribution de T_g où $g(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -1-x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

2. Soit $f(x) = \sin(x) - x$ et φ une fonction test. Calculer $T(\varphi)$ pour $T = f\delta_0$ et $T = f\delta'_0$.