Corrigé Contôle Continue Final

Exercice 1 (2 pts) Soit $1 > \alpha > 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x^\alpha} dx$ est convergente.

Corrigé On a $0 \leq \frac{e^{-\alpha x}}{x^\alpha} \leq e^{-\alpha x}$ pour $x \geq 1$. Comme $\alpha > 0$ l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{0-e^{-\alpha}}{\alpha}$ existe et donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x^\alpha} dx$ est convergente.

On a $0 \leq \frac{e^{-\alpha x}}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$ pour $x \leq 1$. D'apres le critère de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ est convergente, car $\alpha < 1$, et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\alpha x}}{x^\alpha} dx$ est aussi convergente.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x^\alpha} dx$ est convergente.

Exercice 2 (4 pts) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|x|}}{x^{2n}+1} dx$.

Corrigé On a $\displaystyle\frac{e^{-|x|}}{x^{2n}+1} \leq e^{-|x|}$ pour tout x. Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx$ est convergente on peut interchanger la limite est l'intǵegrale (par le théorème de la convergence dominante). On a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x^{2n} + 1 = 1$ si $|x| < 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x^{2n} + 1 = +\infty$ is $|x| > 0$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|x|}}{x^{2n}+1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-|x|}}{x^{2n}+1} dx = \int_{-1}^{1} e^{-|x|} dx = 2(1-e^{-1}).$$

Exercice 3 (3 pts) Déterminer le produit de convolution $f \star g(x)$ où $f(x) = e^{-x}H(x)$ et $g(x) = e^{-x}H(x-1)$.

Corrigé

$$\begin{aligned} f \star g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)} H(x-y) e^{-y} H(y-1) dy \\ &= \int_1^x e^{-(x-y)} e^{-y} dy = e^{-x} \int_1^x dy = (x-1)e^{-x} \end{aligned}$$

Exercice 4 (3 pts) **Corrigé**

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} e^{-x} H(x-a) dx \\ &= \int_a^{+\infty} e^{(-ik-1)x} dx \\ &= \left[\frac{e^{(-ik-1)x}}{-ik-1} \right]_a^{+\infty} = \frac{e^{(-ik-1)a}}{ik+1} \end{aligned}$$

Exercice 5 (1.5+2+1.5 pts) **Corrigé** Soit $Y(s) = \dfrac{s+4}{(s-2)^2}$.

1.
$$\frac{s+4}{(s-2)^2} = \frac{s-2}{(s-2)^2} + \frac{6}{(s-2)^2} = \frac{1}{(s-2)} + \frac{6}{(s-2)^2}$$

2.
$$\mathcal{L}^{-1}(Y)(t) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{(s-2)})(t) + \mathcal{L}^{-1}(\frac{6}{(s-2)^2})(t) = e^{2t} + 6te^{2t}$$

Pour z complexe soit $f(z) = \dfrac{z+4}{(z-2)^2}$.

3. D'aprés 1. on a $f(z) = a_{-1}\dfrac{1}{(z-2)} + a_{-2}\dfrac{1}{(z-2)^2}$ avec $a_{-1} = 1$. Donc le résidu de f est 1.

Exercice 6 (2+2+3 pts) Soit $f(z) = \dfrac{1}{e^z + e^{-z}}$.

1. Les singularités de f sont les z pour lesquels $e^z + e^{-z} = 0$.
$$e^z + e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = -1 \Leftrightarrow 2z = \pi i + 2\pi i k, k \in \mathbb{Z}$$
Donc $\{i\pi(k + 1/2) | k \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des singularités de f.

2. Le résidu de f en $i\pi/2$ et (pourvu que la limite existe) égal à
$$\lim_{z\to i\pi/2}(z - \frac{i\pi}{2})f(z) = \lim_{z\to i\pi/2}\frac{2z - i\pi}{2(e^z + e^{-z})} = \lim_{z\to i\pi/2}\frac{2}{2(e^z - e^{-z})} = \frac{1}{2i}$$
(pour la deuxième égalité on utilise la règle de l'Hôpitale). Donc $Res(f, i\pi/2) = \frac{1}{2i}$. D'une manière similaire
$$Res(f, -i\pi/2) = \lim_{z\to -i\pi/2}\frac{2z + i\pi}{2(e^z + e^{-z})} = \lim_{z\to -i\pi/2}\frac{2}{2(e^z - e^{-z})} = -\frac{1}{2i}$$

3. On utilise le théorème des résidus qui exprime $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz$ comme la somme sur les singularités des résidus de f fois l'indice de γ en la singularité.
   (a) Si $w = i\pi/2$ et $R = 1$ le chemin trace le cercle de rayon 1 et centre $i\pi/2$. Comme $1 < \pi$ seulement la singularité à $i\pi/2$ est dans ce cercle. C'est donc la seule singularité où l'indice de γ est non-nul et en effet 1. Le théorème des résidus donne alors
$$\int_{\gamma_{\frac{i\pi}{2},1}} f(z)dz = 2\pi i Res(f, i\pi/2) = 2\pi i\frac{1}{2i} = \pi$$
   (b) Si $w = 0$ et $R = \pi$ le chemin trace le cercle de rayon π et centre 0. Comme $3\pi/2 > \pi > \pi/2$ les singularités à $i\pi/2$ et à $-i\pi/2$ sont dans le cercle. Le théorème des résidus donne alors
$$\int_{\gamma_{\frac{i\pi}{2},1}} f(z)dz = 2\pi i(Res(f, i\pi/2) + Res(f, -i\pi/2)) = 0$$