Contôle Continue Final - (2 heures)

On note H la fonction de Heavyside, $H(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$.

Exercice 1 Soit $1 > \alpha > 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x^\alpha} dx$ est convergente.

Exercice 2 Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|x|}}{x^{2n}+1} dx$.
Indication : $\dfrac{e^{-|x|}}{x^{2n}+1} \leq e^{-|x|}$.

Exercice 3 Déterminer le produit de convolution $f \star g(x)$ où $f(x) = e^{-x}H(x)$ et $g(x) = e^{-x}H(x-1)$.

Exercice 4 Calculer la transformé de Fourier $\hat{f}(k)$ de $f(x) = e^{-x}H(x-a)$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 Soit $Y(s) = \dfrac{s+4}{(s-2)^2}$.

1. Décomposer Y en éléments simples.
2. Trouver la transformé de Laplace inverse de Y.

Pour z complexe soit $f(z) = \dfrac{z+4}{(z-2)^2}$.

3. Quel est le résidu de f en 2 ?

Exercice 6 Soit $f(z) = \dfrac{1}{e^z + e^{-z}}$.

1. Quelles sont les singularités de f ?
2. Déterminer le résidu de f en $i\pi/2$ et en $-i\pi/2$.
3. Soit $\gamma_{w,R} : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_{w,R}(t) = w + Re^{2\pi i t}$, où $w \in \mathbb{C}$ et $R \geq 0$.
   Tracer le chemin $\gamma_{w,R}$ et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\gamma_{w,R}} f(z)dz$ pour
   (a) $w = i\pi/2$ et $R = 1$,
   (b) $w = 0$ et $R = \pi$.