

## FICHE TD 5 - Transformation de Fourier

La transformée de Fourier de la fonction  $f$  est

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} f(x) dx$$

**Exercice 1** La fonction  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$  est appelée sinus cardinal. Soit  $\chi_{[-a,a]}$  la fonction indicatrice sur  $[-a, a]$ .

1. Calculer la transformée de Fourier de  $\frac{1}{2a}\chi_{[-a,a]}$ .

2. Déterminer  $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(x) dx$ .

3. Déterminer  $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(x) dx$ .

4. Calculer la transformée de Fourier de la fonction triangle définie par  $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

5. Déterminer  $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^4(x) dx$ .

**Exercice 2** Soit  $k_0 \in \mathbb{R}$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  (absolument intégrable).

1. Quelle est la transformée de Fourier de  $f(x) \cos(k_0 x)$  (en terme de la transformée de  $f$ ).

2. Tracer le graphe de la transformée de Fourier de  $\chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x) \cos(2\pi x)$ .

**Exercice 3** Soit  $H(x)$  la fonction de Heavyside.

1. Calculer la transformée de Fourier de  $f(x) = xe^{-x}H(x)$ .

2. Calculer la transformée de Fourier de  $f(x) = x^n e^{-x}H(x)$ .

3. Calculer la transformée de Fourier de  $f(x) = xe^{-|x|}$ .

**Exercice 4** Calculer la transformée de Fourier de  $f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{\pi(x-\frac{1}{2})}$ .

*Indication* : on pourrait utiliser  $\cos(\alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ .

**Exercice 5** On cherche une solution  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de l'équation différentielle

$$-f''(x) + f(x) = e^{-2|x|}.$$

1. Montrer que, si  $f$  est solution alors  $\hat{f}$  satisfait

$$\hat{f}(k) = \frac{4}{3} \left( \frac{1}{1+k^2} - \frac{1}{4+k^2} \right)$$

2. En déduire  $f(x)$ .