

FICHE TD 6 - Distributions

On note H la fonction de Heavyside et $\chi_{[a,b]}$ la fonction indicatrice sur $[a, b]$.

Exercice 1 Déterminer les limites (au sens des distributions)

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} T_{n\chi_{[-1,1]}(nx)}, \quad (b) \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\delta_{-\frac{1}{n}} - \delta_{\frac{1}{n}}), \quad (c) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_{\epsilon} \quad \text{où } T_{\epsilon}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x + i\epsilon} dx$$

Exercice 2 Déterminer les dérivées premières et secondes T' et T'' des distributions suivantes :

$$(a) T = T_{\chi_{[-1,1]}}, \quad (b) T = T_{f\chi_{[-1,1]}}, f \text{ de classe } C^{\infty}, \quad (c) T = T_{[x]} \quad ([x] \text{ est le plus grand entier } n \leq x)$$

$$(d) T = T_{|x|}, \quad (e) T = T_{H(x)\sin(x)}, \quad (f) T = T_{H(x)\cos(x)}$$

Exercice 3 Soit δ_a la distribution δ en a , $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$. Déterminer

$$(a) (x - a)\delta_a, \quad (b) (x - a)\delta'_a \quad (c) (x - a)^2\delta'_a$$

Exercice 4 Déterminer

$$(a) \left(\frac{d}{dx} - \lambda \right) T_{e^{\lambda x} H(x)}, \quad (b) \left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 \right) T_{\frac{\sin(\omega x)}{\omega} H(x)}$$

Exercice 5 Calculer les produits de convolution des distributions suivantes

$$(a) \delta_0 * T_{\chi_{[0,1]}}, \quad (b) \delta'_0 * T_{H(x)\sin(x)} \quad (c) \delta_a * \delta_b.$$