CC 2. Sujet A

Exercice 1 (5 points). Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-2x}H(x)$ où H est la fonction de Heavyside

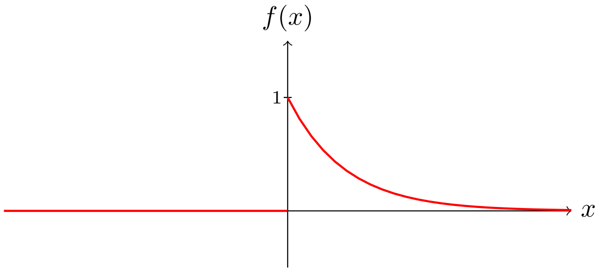
$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

(a) Tracer le graphe de f.

(b) Calculer la transformée de Fourier de f.

Correction.

(a) Voici le graphe de f :



(b) $\hat{f}(p) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-ipx-2x}\,dx = \frac{1}{2+ip}.$ ✓

Exercice 2 (10 points). Soit f la fonction définie par :

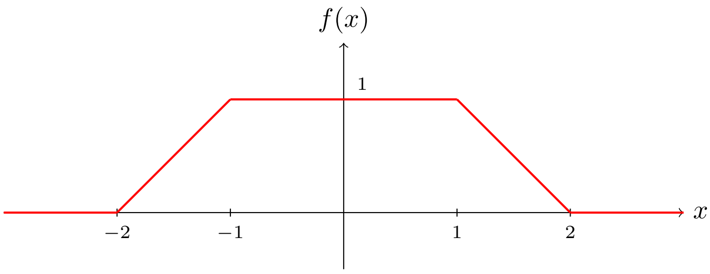
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2, \\ 2+x & \text{si } -2 \leqslant x < -1, \\ 1 & \text{si } -1 \leqslant x < 1, \\ 2-x & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 0 & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$$

(a) Tracer le graphe de f et vérifier qu'elle est paire.

(b) Calculer la transformée de Fourier de f.

Correction.

(a) Voici le graphe de f :



Le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La fonction f est donc paire.

(b) On va utiliser le fait que f soit paire. Soient $\hat{f}_+(p)$ l'intégrale $\int_0^\infty e^{-ipx} f(x)\,dx$ et $\hat{f}_-(p)$ l'intégrale $\int_{-\infty}^0 e^{-ipx} f(x)\,dx$. On a bien sûr $\hat{f}(p) = \hat{f}_+(p) + \hat{f}_-(p)$. En posant $y = -x$ dans l'intégrale définissant $\hat{f}_-(p)$ et en utilisant $f(-x) = f(x)$ (*i.e.* f paire), on trouve $\hat{f}_-(p) = \hat{f}_+(-p)$. On peut donc se contenter de calculer $\hat{f}_+(p)$ (on pouvait aussi simplement faire le calcul de la transformée de Fourier sans utiliser cette astuce). En intégrant par parties, on trouve, si $p \neq 0$,

$$\hat{f}_+(p) = \frac{1}{p^2}\left(e^{-ip} - e^{-2ip}\right) + \frac{1}{ip}$$

si bien que

$$\hat{f}_-(p) = \hat{f}_+(-p) = \frac{1}{p^2}\left(e^{ip} - e^{2ip}\right) - \frac{1}{ip}$$

et

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{p^2}\left(e^{ip} + e^{-ip} - e^{2ip} - e^{-2ip}\right) = \frac{2}{p^2}\big(\cos(p) - \cos(2p)\big).$$

En 0, on peut soit faire le calcul direct (*i.e.* $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$) soit utiliser l'argument suivant : on peut montrer que $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier en 0, car f est absolument intégrable. Ainsi $\hat{f}(0) = \lim_{p\to 0} \hat{f}(p)$. ✓

Exercice 3 (6 points). Déterminer la dérivée première de la distribution suivante T_f avec

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x < 0, \\ \cos(x) & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Correction. — On peut utiliser la formule des sauts. Ici f est discontinue en 0 et le saut correspondant vaut 1. Ainsi

$$T_f' = T_{f'} + \delta_0 \qquad \text{avec } f'(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x < 0, \\ -\sin(x) & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$ ✓

Exercice 4 (4 points). Déterminer la distribution

$$(1-x)\delta_2$$

Correction. — On rappelle que pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f(x)\delta_a = f(a)\delta_a$. Ici $f(x) = 1 - x$ est bien infiniment dérivable donc $(1-x)\delta_2 = -\delta_2$. ✓

CC 2. Sujet B

Exercice 1 (5 points). Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-3x}H(x)$ où H est la fonction de Heavyside

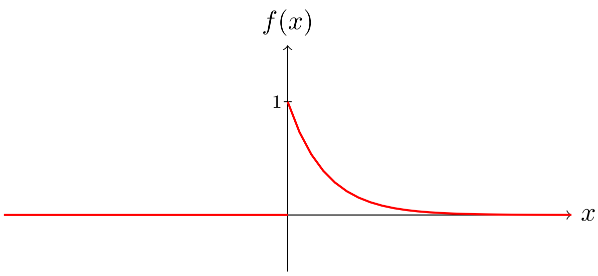
$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

(a) Tracer le graphe de f.

(b) Calculer la transformée de Fourier de f.

Correction.

(a) Voici le graphe de f :



(b) $\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-ipx-3x}\, dx = \frac{1}{3+ip}$. ✓

Exercice 2 (10 points). Soit f la fonction définie par :

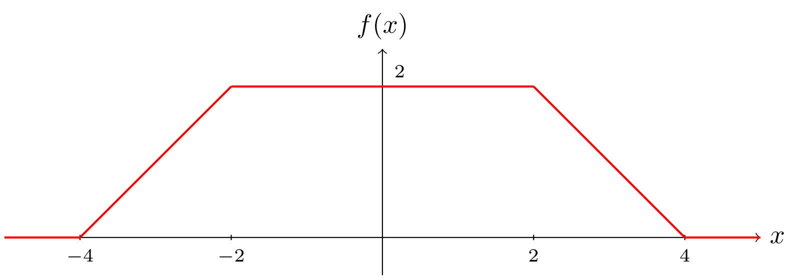
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -4, \\ 4+x & \text{si } -4 \leqslant x < -2, \\ 2 & \text{si } -2 \leqslant x < 2, \\ 4-x & \text{si } 2 \leqslant x < 4, \\ 0 & \text{si } x \geqslant 4. \end{cases}$$

(a) Tracer le graphe de f et vérifier qu'elle est paire.

(b) Calculer la transformée de Fourier de f.

Correction.

(a) Voici le graphe de f :



Le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. La fonction f est donc paire.

(b) Comme pour le sujet A, on va utiliser le fait que f soit paire. Avec les mêmes notations que celles de la correction du sujet A, on trouve, si $p \neq 0$,

$$\hat{f}_+(p) = \frac{1}{p^2}\left(e^{-2ip} - e^{-4ip}\right) + \frac{2}{ip}$$

si bien que

$$\hat{f}_-(p) = \hat{f}_+(-p) = \frac{1}{p^2}\left(e^{2ip} - e^{4ip}\right) - \frac{2}{ip}$$

et

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{p^2}\left(e^{2ip} + e^{-2ip} - e^{4ip} - e^{-4ip}\right) = \frac{2}{p^2}\big(\cos(2p) - \cos(4p)\big).$$

Comme pour le sujet A, $\hat{f}(0)$ peut soit se calculer directement soit être obtenu comme limite de $\hat{f}(p)$ en 0. ✓

Exercice 3 (6 points). Déterminer la dérivée première de la distribution suivante T_f avec

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 0, \\ x^2 & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Correction. — On peut utiliser la formule des sauts. Ici f est discontinue en 0 et le saut correspondant vaut -1. Ainsi

$$T_f' = T_{f'} - \delta_0 \qquad \text{avec } f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 2x & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$ ✓

Exercice 4 (4 points). Déterminer la distribution

$$(x+2)\delta_1$$

Correction. — On rappelle que pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f(x)\delta_a = f(a)\delta_a$. Ici $f(x) = x + 2$ est bien infiniment dérivable donc $(x+2)\delta_1 = 3\delta_1$. ✓