

FICHE TD 5 – Transformation de Laplace

On rappelle que la transformée de Laplace d'une fonction f est définie, pour tout $s \in \mathbb{R}$, par

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Exercice 1 Par un calcul explicite, trouver la transformée de Laplace de

$$(a) f(t) = te^{6t}, \quad (b) f(t) = e^{-t} \sin 2t$$

En se ramenant des résultats connus, trouver la transformée de Laplace de :

$$(c) f(t) = e^{\gamma t} \sin(\alpha t) \cos(\beta t),$$

où α, β, γ sont des réels.

Exercice 2 (*Valeur initiale et finale*) Soit $f(t) = e^{\gamma t} \cos(t)$. Déterminer, pour $\gamma < 0$, puis pour $\gamma \geq 0$,

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\mathcal{L}[f](s), \text{ et } \lim_{s \rightarrow +\infty} s\mathcal{L}[f](s),$$

lorsque cela est possible.

Exercice 3 (*Inversion de la transformation de Laplace*) Trouver la fonction f telle que $\mathcal{L}[f](s) = Y(s)$, où

$$(a) Y(s) = \frac{7s - 25}{s^2 - 7s + 12}, \quad (b) Y(s) = \frac{2s - 5}{s^2 + 4s + 8}, \quad (c) Y(s) = \frac{s + 4}{(s - 2)^3}, \quad (d) Y(s) = \frac{s^2 - 3s + 3}{s^3 - 3s^2 + 4s - 2}.$$

Exercice 4 (*Équations différentielles linéaires avec conditions initiales*) En utilisant la transformation de Laplace, résoudre pour f l'équation

$$(a) f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = e^{3t}, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0 \\ (b) f''(t) - 2f'(t) + 2f(t) = \cos(t), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0$$