

FICHE TD 6 - Distributions

La fonction $H = 1_{]0,+\infty[}$ est la fonction de Heaviside et $1_{[a,b]}$ est l'indicatrice de l'intervalle $[a, b]$.

δ_a est la distribution de Dirac en a , $\delta_a(f) = f(a)$. Les $(*)$ désignent les questions un peu plus dures.

Exercice 1 Déterminer les dérivées première T' et seconde T'' des distributions :

1. $T = T_{1_{[-1,1]}}$,
2. $T = T_{f1_{[-1,1]}}$, avec f de classe C^∞ .
3. $(*) T = T_{[x]}$ où $[x]$ le plus grand entier $n \leq x$ (la partie entière de x)
4. $T = T_{|x|}$,
5. $T = T_{H(x)\sin(x)}$,
6. $T = T_{H(x)\cos(x)}$.

Exercice 2 Calculer les primitives des distributions suivantes :

1. δ'_0 ,
2. $T_{\text{sgn}(x)}$ avec sgn le signe de x ,
3. $(1+x)\delta_a$ avec $a \in \mathbb{R}$.
4. $(1+x)^2(\delta'_0)$,
5. $(*)$ Le peigne de Dirac III_T .
6. $(*) T_{1/\sqrt{|x|}}$.
7. $(*) (1+x)(\delta''_0)$,

Exercice 3 Résoudre l'équation $u' + au = T$ pour :

1. $a(x) = x, T = \delta_0$,
2. $a(x) = 1, T = H$,
3. $a(x) = (1-x), T = \delta'_0$,

Exercice 4 Déterminer les limites (au sens des distributions)

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_{n1_{[-1,1]}(nx)}$.
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\delta_{-\frac{1}{n}} - \delta_{\frac{1}{n}})$.
3. $(*) \lim_{n \rightarrow +\infty} T_{e^{x/n}}$.
4. $(*) \lim_{n \rightarrow +\infty} T_{e^{-nx^2}}$.
5. $(*) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}T_{e^{-nx^2}}$.

Exercice 5 Soit δ_a la distribution de Dirac en a , $\delta_a(f) = f(a)$. Déterminer :

1. $(x-a)\delta_a$,
2. $(x-a)\delta'_a$,
3. $(x-a)^2\delta'_a$.

Exercice 6 Déterminer :

1. $(\frac{d}{dx} - \lambda) T_{e^{\lambda x} H(x)}$,
2. $(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2) T_{\frac{\sin(\omega x)}{\omega} H(x)}$.

Exercice 7 Déterminer les produits de convolution des distributions suivantes :

1. $\delta_0 * T_{1_{[0,1]}}$,
2. $\delta'_0 * T_{\sin(x)H(x)}$.
3. $\delta_a * \delta_b$.
4. $\delta'_0 * H$
5. $(*) \text{III}_4 * T_{1_{[-1,1]}}$