

FICHE TD 7 - Fonctions à une variable complexe I

- Exercice 1** 1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme polaire (aussi dite forme trigonométrique) : $(1+i)^{10}$, $(1+i\sqrt{3})$, 10 .
2. Décrire les ensembles $\{z \in \mathbb{C}; |z - \bar{z}| = 2\}$, $\{z \in \mathbb{C}; |z - 2| = 1\}$, $\{z + 1/z : |z| = 1\}$.
3. Donner l'expression de la rotation de centre 1 et d'angle $\pi/4$.

Exercice 2 En utilisant la formule de Cauchy-Riemann ou en vérifiant que la limite $\lim_{\substack{w \rightarrow z \\ w \neq z}} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$ existe, déterminer si les fonctions suivantes sont holomorphes ou non :

(a) $f(z) = z^2$ sur \mathbb{C} , (b) $f(z) = |z|^2$ sur \mathbb{C} , (c) $f(z) = \frac{1}{z}$ sur \mathbb{C}^*

Exercice 3 Séries entières.

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Quelle est sa somme ?

(b) Développer la fonction $\frac{1}{(1-z)^2}$ en série entière. Quel est son rayon de convergence ?

(c)(*) Développer la fonction $\log(1-z)$ en série entière autour de 0. Ici \log est le logarithme principal et $z-1 \notin \mathbb{R}^+$. Quel est son rayon de convergence ?

(d)(*) Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que $\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n$ pour tout $|z| < |a|$.

Montrer que $\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n$ pour tout $|z| > |a|$.

Exercice 4 Intégrales le long un chemin.

- Donner un lacet γ qui trace un cercle de rayon $R > 0$ autour de 0 dans le sens direct. Puis calculer l'intégrale de $f(z) = \frac{1}{z}$ le long de γ , $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$.
- Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ le lacet $\gamma(t) = 25 + 24e^{2\pi it^2}$. Calculer l'intégrale $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$.
- Soit $\gamma : [0, 3] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = \begin{cases} Re^{\pi it} & t \in [0, 1] \\ R(t-2) & t \in [1, 3] \end{cases}$. Calculer les intégrales $\int_{\gamma} \frac{1}{z-i} dz$ et $\int_{\gamma} \frac{1}{z+i} dz$ pour $0 < R < 1$ et $1 < R$.

Exercice 5 \mathcal{C} est le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct. Calculer les intégrales suivantes :

- $\int_{\gamma} z dz$ avec γ paramétrant $[0, 1]$ avec $\gamma(0) = 0, \gamma(1) = 1$.
- $\int_{\mathcal{C}} z^n dz$, avec $n \in \mathbb{Z}$ et \mathcal{C} le cercle unité.
- $\int_{\mathcal{C}} e^z dz$.
- $\int_{\mathcal{C}} e^{z^3} dz$.
- $\int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \cos(\theta + \sin(\theta)) d\theta$
- $\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z} dz$ avec successivement : $f(z) = \cos(z), f(z) = \sin(z), f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z+2}$.

Exercice 6 Résidus des fonctions méromorphes. Déterminer les pôles et résidus des fonctions méromorphes suivantes :

(a) $f(z) = \frac{z^2 - 4}{z^2 - 2z - 3}$, (b) $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$, (c) $f(z) = \frac{z}{\sin(\pi z)}$, (d) $f(z) = \frac{\sin(z)}{(z-1)^2}$.