FICHE TD 8 - Fonctions à une variable complexe II

Exercice 1 Trouver les résidus − en leurs pôles − des fonctions données:

(a) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$, (b) $g(z) = \dfrac{1}{z(z+2)^3}$,

(c) $h(z) = \dfrac{ze^{2019z}}{(z-3)^2}$, (d) $k(z) = \dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$.

Exercice 2 Par le théorème des résidus, calculer les intégrales des fonctions de l'exercice 1 le long des lacets donnés (le cercle γ est toujours centré sur 0 et parcouru dans le sens direct):

(a) $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ avec γ le cercle de rayon $\dfrac{3}{2}$ puis celui de rayon 10

(b) $\displaystyle\int_\gamma g(z)dz$ avec γ le cercle de rayon 1 puis celui de rayon 3

(c) $\displaystyle\int_\gamma h(z)dz$ avec γ le cercle de rayon 12 puis celui de rayon 2019

(d) $\displaystyle\int_\gamma k(z)dz$ avec γ le cercle de rayon $\dfrac{3}{2}$ puis celui de rayon 5

Exercice 3 En utilisant la formule des résidus et en choisissant soigneusement le contour montrer que :

− à partir du bord du demi-disque de centre l'origine et de diamètre sur l'axe des réels

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$, (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipx}}{1+x^2}dx = \pi e^{-p}$ pour tout $p > 0$,

−(*) en utilisant le bord de l'intersection d'un disque de rayon R avec un cône d'angle $2\pi/n$, c'est à dire le bord de $K = \{re^{i\theta} : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi/n\}$:

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$,

−(*) en utilisant le bord de la région $K_{\varepsilon R}$ déssiné ci-dessous pour $0 < \varepsilon < 1 < R$ (dessin extrait du livre *Analyse complexe* d'Éric Amar et Étienne Matheron, Cassini 2004):

(e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^a(1+x)}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi(1-a))}$ pour tout $a \in]0,1[$.