Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE MATH4
Année 2019-2020
Printemps 2020

FICHE TD 1 - Relations de comparaisons, Intégrales impropres

Exercice 1 Calculer par intégration par parties ou changement de variables les intégrales à bornes suivantes :

$$(a) \int_0^{2\pi} x\cos(x)dx, \quad (b) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 2 Relations de comparaison.

1. Soit $f(x) = x^4 + \cos(x) + \frac{1}{x}$. Dire si $f(x) \sim_{x\to+\infty} g(x)$ pour

$$g(x) = x^4, g(x) = 2x^4, g(x) = x^4 + 1, g(x) = x^4 + \frac{1}{x}.$$

2. Calculer un équivalent et les limites des fonctions suivantes quand $x \to 0$:

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sin(x)}, \quad g(x) = \frac{(\sin(2x))^2}{\sin(x)}, \quad h(x) = \frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{1-\cos(x)}, \quad i(x) = \frac{\exp\left(\frac{2}{\sin^2(x)}\right)}{\exp\left(\frac{1}{1-\cos(x)}\right)}.$$

3. Donner un équivalent quand $x \to +\infty$ de

$$f(x) = \frac{x^6 + \cos(x) + 1}{x^4 + x}, \quad g(x) = \sin(\frac{1}{x^2}), \quad h(x) = \frac{x^6 + \cos(x) + 1}{x^4 + x}\sin(\frac{1}{x^2})$$

Exercice 3 Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?
($n \in \mathbb{N}$, $a \in]0, +\infty[$, $b \in]0, +\infty[$).

$$(a) \int_0^\infty \log(t)dt, \quad (b) \int_0^\infty e^{-4t}dt, \quad (c) \int_0^\infty t^2e^{-t}dt,$$

$$(d) \int_0^\infty e^{-t^2}dt, \quad (e) \int_0^\infty \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}}dt, \quad (f) \int_2^\infty (1-\cos(\frac{1}{t}))dt$$

Exercice 4 Montrer en intégrant par partie que

$$\int_1^t \frac{\sin(x)}{x}dx = \cos(1) - \frac{\cos(t)}{t} - \int_1^t \frac{\cos(x)}{x^2}dx$$

En déduire que l'intégrale impropre $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$ est convergente.

Exercices supplémentaires

Exercice 5 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + x^{100}}{x^{101}}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-2} + \ln(x) + \sqrt{x}}{\pi\sqrt{x} + 1}, \quad \lim_{x\to\infty} (1 + \frac{2}{x})^x.$$

Exercice 6 Relations de comparaison. Donner un équivalent quand $x \to +\infty$ de

$$i(x) = \frac{x^6 + 1}{x^4 + x} - x^4\sin(\frac{1}{x^2})$$

Exercice 7 Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?
($n \in \mathbb{N}$, $a \in]0, +\infty[$, $b \in]0, +\infty[$).

$$(a) \int_0^{\pi/2} \log(\sin(t))dt, \quad (b) \int_0^2 \log(t)dt, \quad (c) \int_0^1 \sin(\frac{1}{t})dt,$$

$$(d) \int_1^\infty \frac{dx}{x^a}, \quad (e) \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \qquad (f) \int_0^\infty e^{-bx}\sin(ax)dx,$$

Exercice 8 Soit $F : [1, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction bornée, qui est dérivable avec dérivée continue. Montrer que l'intégrale impropre

$$\int_1^\infty \frac{F'(x)}{x}dx$$

est convergente. En déduire la convergence de $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x}dx$ et de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$

Exercice 9 Discuter selon les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ la convergence de l'intégrale suivante :

$$(a) \int_2^\infty \frac{1}{(\log t)^a t^b}dt, \quad (b) \int_{2020}^\infty \frac{1}{(\log t)^a t^b}dt$$

Exercice 10 On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est **intégrable** (ou sommable) sur $\mathbb{R}$ si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty.$$

On cherche à montrer que les limites en $\pm\infty$ d'une fonction f absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ ne sont pas forcément 0.

1. Soit $f(x) = \sum_{n=1}^\infty 1_{[n, n+\frac{1}{2^n}]}(x)$ la somme d'indicatrice. C'est à dire $f(x) = 1$ si il existe $n \geq 1$ avec $n \leq x \leq n + \frac{1}{2^n}$ et $f(x) = 0$ sinon. Montrer que :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx = 1.$$
2. Quelle est la limite $\lim_{n\to+\infty} f(n)$? Quelle est la limite $\lim_{n\to+\infty} f(n + \frac{1}{2})$?
3. En déduire que f ne tend pas vers 0 en $+\infty$.