Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE MATH4
Année 2019-2020
Printemps 2020

FICHE TD 2 - Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 1 Soient $f(x) = (\int_0^x e^{-t^2}dt)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$.

1. Montrer que f et g sont $\mathcal{C}^1$ et calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.
2. Montrer que $f'(x) + g'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, en déduire la valeur de $f(x) + g(x)$.
3. En déduire que $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 2 Soit, $p > 0$, et

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-px}\frac{\sin x}{x}dx.$$

Let but est de calculer $F(p)$ en passant par sa dérivée.

1. Montrer que l'intégrale dans la définition de $F(p)$ est convergente pour tout $p > 0$.
2. Soit $p_0 > 0$. Montrer que $F'(p)$ existe pour $p \geq p_0$. En déduire que $F'(p)$ existe pour $p > 0$.
3. Vérifier par dérivation que $\frac{p\sin x + \cos x}{1+p^2}e^{-px}$ est une primitive de $-e^{-px}\sin x$ et calculer $F'(p)$.
4. En déduire que $F(p) = -\arctan p + C$ pour une constante $C \in \mathbb{R}$.
5. Montrer que $|F(p)| \leq \int_0^\infty e^{-px}dx$ et en dduire que $\lim_{p\to+\infty} F(p) = 0$.
6. Montrer que

$$C = \lim_{p\to+\infty} F(p) + \arctan p = \frac{\pi}{2}.$$

Exercices supplémentaires

Exercice 3 Calcul d'une fonction définie par une intégrale.

Soit $f(p) := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{px}\,dx.$

1. Montrer que f est définie sur $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'elle est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
3. En déduire que $f(p) = \sqrt{\pi}e^{p^2/4}$. *On rappelle que* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Exercice 4 Dérivation des intégrales à paramètres.

Soit $f(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin(tx)}{1+t^4}\,dt.$

1. Montrer que l'intégrale pour définir $f(x)$ est convergent pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que la k-ième dérivée $f^{(k)}(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que f vérifie l'équation différentielle : $f^{(4)}(x) + f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 e^{-px}\,dx.$

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable deux fois sur $]0, +\infty[$.
2. En utilisant la relation $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$. Montrer que $f''(p) = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4}$
3. Montrer que f et f' tendent vers 0 en $+\infty$: $\lim_{p\to+\infty} f(p) = \lim_{p\to+\infty} f'(p) = 0$.
4. En déduire que

$$f(p) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{p}{2}) + \frac{p}{4}\ln(\frac{p^2}{p^2+4}).$$

5. Trouver la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx.$