FICHE TD 3 – Transformation de Laplace

On rappelle que la transformée de Laplace d'une fonction f est définie, pour tout $s \in \mathbb{R}$, par

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Exercice 1 Par un calcul explicite, trouver la transformée de Laplace de

$$(a)\ f(t) = te^{6t}, \qquad (b)\ f(t) = e^{-t}\sin 2t$$

En se ramenant à des résultats connus, trouver la transformée de Laplace de :

$$(c)\ f(t) = e^{\gamma t}\sin(\alpha t)\cos(\beta t),$$

où α, β, γ sont des réels.

Exercice 2 (*Valeur initiale et finale*) Soit $f(t) = e^{\gamma t}\cos(t)$. Déterminer, pour $\gamma < 0$, puis pour $\gamma \geq 0$,

$$\lim_{s\to 0} s\mathcal{L}[f](s), \text{ et } \lim_{s\to+\infty} s\mathcal{L}[f](s),$$

lorsque cela est possible.

Exercice 3 (*Inversion de la transformation de Laplace*) Trouver la fonction f telle que $\mathcal{L}[f](s) = Y(s)$, où

$$(a)\ Y(s) = \frac{7s-25}{s^2-7s+12}, \quad (b)\ Y(s) = \frac{2s-5}{s^2+4s+8}, \quad (c)\ Y(s) = \frac{s+4}{(s-2)^3}, \quad (d)\ Y(s) = \frac{s^2-3s+3}{s^3-3s^2+4s-2}.$$

Exercice 4 (*Équations différentielles linéaires avec conditions initiales*)
En utilisant la transformation de Laplace, trouver les f solution de l'équation :

$$(a)\ f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = e^{3t}, \qquad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0$$
$$(b)\ f''(t) - 2f'(t) + 2f(t) = \cos(t), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0$$