Université Claude Bernard Lyon 1 PCSI L2 UE MATH4
Année 2019-2020
Printemps 2020

FICHE TD 4 - Produit de convolution

Exercice 1 - *Fonctions indicatrices (caractéristique).* Soit $I \subset \mathbb{R}$ et

$$1_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{si } x \notin I \end{cases}$$

la fonction indicatrice (ou caractéristique) sur I.

1. On pose $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Etablir par calcul direct que $1_I \star 1_I$ est une fonction continue, qui est linéaire par morceau. Tracer son graphe.
2. On pose $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Etablir par calcul direct que $1_I \star 1_I \star 1_I$ est une fonction dérivable, qui est quadratique par morceau. Tracer son graphe.
3. Soit $h(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$. Etablir par calcul direct que $1_{[-1,1]} \star h$ est continue.

Exercice 2 Soit $f_a(x) = e^{ax}$. Justifier l'existence et calculer les produits de convolution pour des valeurs a, b réelles:

(a) $(f_a 1_{[0,+\infty[}) \star (f_b 1_{[0,+\infty[})$,

(b) $1_{[-a,a]} \star (f_b 1_{[0,\infty]})$,

(c) $(1_{[-a,a]} \star f_b) 1_{[0,\infty]}$

Exercice 3 - *Convolée de Gaussiennes.*

Pour $(m, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on considère la fonction $g_{m,\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

On admet que $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$.

1. Calculer $\displaystyle \int_{-\infty}^{+\infty} g_{m,\sigma}(x) dx$.
2. Montrer que $g_{p,\sigma} \star g_{q,\tau} = g_{p+q,\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}$.