

FICHE TD 5 - Transformation de Fourier

La transformée de Fourier de la fonction f est

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} f(x) dx$$

Exercice 1 La fonction $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ est appelée sinus cardinal. Soit $1_{[-a,a]}$ la fonction indicatrice sur $[-a, a]$.

1. Calculer la transformée de Fourier de $\frac{1}{2a}1_{[-a,a]}$.

2. Déterminer $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(x) dx$.

3. Déterminer $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(x) dx$.

4. Calculer la transformée de Fourier de la fonction triangle définie par $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

5. Déterminer $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^4(x) dx$.

Exercice 2 Soit $k_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (absolument intégrable).

1. Quelle est la transformée de Fourier de $f(x) \cos(k_0 x)$ (en terme de la transformée de f).

2. Tracer le graphe de la transformée de Fourier de $1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x) \cos(2\pi x)$.

Exercice 3 Soit $H(x)$ la fonction de Heaviside.

1. Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = xe^{-x}H(x)$.

2. Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = x^n e^{-x}H(x)$.

3. Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = xe^{-|x|}$.

Exercice 4 Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{\pi(x-\frac{1}{2})}$.

Indication : on pourrait utiliser $\cos(\alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

Exercice 5 On cherche une solution $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$-f''(x) + f(x) = e^{-2|x|}.$$

1. Montrer que, si f est solution alors \hat{f} satisfait

$$\hat{f}(k) = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{1+k^2} - \frac{1}{4+k^2} \right)$$

2. En déduire $f(x)$.