

## FICHE TD 6 - Distributions

La fonction  $H = 1_{]0,+\infty[}$  est la fonction de Heaviside et  $1_{[a,b]}$  est l'indicatrice de l'intervalle  $[a, b]$ .

$\delta_a$  est la distribution de Dirac en  $a$ ,  $\delta_a(f) = f(a)$ . Les  $(*)$  désignent les questions un peu plus dures.

**Exercice 1** Déterminer les dérivées première  $T'$  et seconde  $T''$  des distributions :

1.  $T = T_{1_{[-1,1]}}$ ,
2.  $T = T_{f1_{[-1,1]}}$ , avec  $f$  de classe  $C^\infty$ .
3.  $(*) T = T_{[x]}$  où  $[x]$  le plus grand entier  $n \leq x$  (la partie entière de  $x$ )
4.  $T = T_{|x|}$ ,
5.  $T = T_{H(x)\sin(x)}$ ,
6.  $T = T_{H(x)\cos(x)}$ .

**Exercice 2** Calculer les primitives des distributions suivantes :

1.  $\delta'_0$ ,
2.  $T_{sgn(x)}$  avec  $sgn$  le signe de  $x$ ,
3.  $(1+x)\delta_a$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .
4.  $(1+x)^2(\delta'_0)$ ,
5.  $(*)$  Le peigne de Dirac  $\text{III}_T$ .
6.  $(*) T_{1/\sqrt{|x|}}$ .
7.  $(*) (1+x)(\delta''_0)$ ,

**Exercice 3** Résoudre l'équation  $u' + au = T$  pour :

1.  $a(x) = x, T = \delta_0$ ,
2.  $a(x) = 1, T = H$ ,
3.  $a(x) = (1-x), T = \delta'_0$ ,

**Exercice 4** Soit  $\delta_a$  la distribution de Dirac en  $a$ ,  $\delta_a(f) = f(a)$ . Déterminer :

1.  $(x-a)\delta_a$ ,
2.  $(x-a)\delta'_a$ ,
3.  $(x-a)^2\delta'_a$ .

**Exercice 5** Déterminer :

1.  $\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right) T_{e^{\lambda x} H(x)}$ ,
2.  $\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right) T_{\frac{\sin(\omega x)}{\omega} H(x)}$ .

**Exercice 6** Déterminer les produits de convolution des distributions suivantes :

1.  $\delta_0 * T_{1_{[0,1]}}$ ,
2.  $\delta'_0 * T_{\sin(x)H(x)}$ .
3.  $\delta_a * \delta_b$ .
4.  $\delta'_0 * H$
5.  $(*) \text{III}_4 * T_{1_{[-1,1]}}$