

FICHE TD 8 - Fonctions à une variable complexe II

Exercice 1 Trouver les résidus – en leurs pôles – des fonctions données:

$$(a) f(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)},$$

$$(b) g(z) = \frac{1}{z(z+2)^3},$$

$$(c) h(z) = \frac{ze^{2019z}}{(z-3)^2},$$

$$(d) k(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}.$$

Exercice 2 Par le théorème des résidus, calculer les intégrales des fonctions de l'exercice 1 le long des lacets donnés (le cercle γ est toujours centré sur 0 et parcouru dans le sens direct):

$$(a) \int_{\gamma} f(z)dz \text{ avec } \gamma \text{ le cercle de rayon } \frac{3}{2} \text{ puis celui de rayon } 10$$

$$(b) \int_{\gamma} g(z)dz \text{ avec } \gamma \text{ le cercle de rayon } 1 \text{ puis celui de rayon } 3$$

$$(c) \int_{\gamma} h(z)dz \text{ avec } \gamma \text{ le cercle de rayon } 12 \text{ puis celui de rayon } 2019$$

$$(d) \int_{\gamma} k(z)dz \text{ avec } \gamma \text{ le cercle de rayon } \frac{3}{2} \text{ puis celui de rayon } 5$$

Exercice 3 En utilisant la formule des résidus et en choisissant soigneusement le contour montrer que :

– à partir du bord du demi-disque de centre l'origine et de diamètre sur l'axe des réels

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi, \quad (b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \quad (c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipx}}{1+x^2} dx = \pi e^{-p} \text{ pour tout } p > 0,$$

–(*) en utilisant le bord de l'intersection d'un disque de rayon R avec un cône d'angle $2\pi/n$, c'est à dire le bord de $K = \{re^{i\theta} : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi/n\}$:

$$(d) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)},$$

–(*) en utilisant le bord de la région $K_{\varepsilon R}$ dessiné ci-dessous pour $0 < \varepsilon < 1 < R$ (dessin extrait du livre *Analyse complexe* d'Éric Amar et Étienne Matheron, Cassini 2004):

$$(e) \int_0^{\infty} \frac{1}{x^a(1+x)} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi(1-a))} \text{ pour tout } a \in]0, 1[.$$

