Veillez à bien noircir les cases.

Codez votre numéro d'étudiant ci-contre ⟶
et écrivez votre nom et prénom ci-dessous :

Nom et prénom :

....

Attention à ne pas vous tromper, toute erreur invalide la copie !

□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0
□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1
□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2
□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3
□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4
□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5
□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6
□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7
□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8
□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9

Math4 – Préparation 1 du QCM1 du 25-28 Février 2020

Règlement – L'épreuve dure 30 minutes. Les calculatrices et les documents sont interdits. **Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.**
Les questions ont toutes une seule bonne réponse, qui vaut **2 points** (pour les 2 questions de cours simple) ou **3 points** (pour les autres 6 questions).

Attention, il y a 2 questions de cours pour lesquelles une réponse fausse vaut **-2 points**.

Cochez une seule réponse par question.

Question 1 [3 points] Laquelle parmi les intégrales suivantes est convergente ?

■ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}dt$ □ $\int_0^1 \frac{1}{t^3}dt$ □ $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ □ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$

Question 2 [3 points] Quel est le développement limité à l'ordre 2 de $f(x) = (1+x)^{1/3}$ en $x \to 0$?

■ $1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o(x^2)$ □ $1 - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o(x^2)$ □ $1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + o(x^2)$ □ $-\frac{x}{3} + o(x^2)$
□ $1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + o(x^2)$ □ $\frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o(x^2)$ □ $-\frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + o(x^2)$ □ $\frac{x}{3} + o(x^2)$

Question 3 Que vaut l'intégrale $I = \int_1^x \frac{\cos(t)+1}{t}dt$ pour $x > 1$?

□ $I = \sin(1) - \frac{\sin(x)}{x} + \int_1^x \frac{\sin(t)+t}{t^2}dt$ □ $I = \frac{\sin(x)}{x} - \sin(1) + \int_1^x \frac{\sin(t)+t}{t^2}dt$
□ $I = \sin(1) - \frac{\sin(x)}{x} + \int_1^x \frac{\sin(t)+t}{t^2}dt$ □ $I = \frac{\cos(x)}{x} - \cos(1) - \int_1^x \frac{\cos(t)-t}{t^2}dt$
□ $I = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)-t}{t^2}dt$ □ $I = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)-t}{t^2}dt$
□ $I = \frac{\cos(x)}{x} - \cos(1) - \int_1^x \frac{\cos(t)-t}{t^2}dt$ ■ $I = \frac{\sin(x)}{x} - \sin(1) + \int_1^x \frac{\sin(t)+t}{t^2}dt$

Question 4 Quelle est la nature de l'intégrale suivante $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)+1}{t}dt$?

□ convergente □ absolument convergente ■ divergente □ aucune des autres réponses

Explication : cd TD1 ex 8 pour la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt$, on ajoute à cela l'intégrale de Riemann divergente $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$, la somme diverge donc.

Question 5 [3 points] Si on peut appliquer le théorème de dérivation à l'intégrale à paramètre

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-(1+x)p} \frac{\cos(x)}{1+x} dx,$$

quel résultat obtiendra-t-on pour la dérivée de F ?

- ☐ $F'(p) = -\int_0^{+\infty} pe^{-(1+x)p} \frac{\cos(x)}{1+x} dx$
- ☐ $F'(p) = \int_0^{+\infty} e^{-(1+x)p} \cos(x) dx$
- ☐ $F'(p) = -\int_0^{+\infty} pe^{-(1+x)p} \cos(x) dx$
- ☐ $F'(p) = \int_0^{+\infty} pe^{-(1+x)p} \cos(x) dx$
- ☐ $F'(p) = \int_0^{+\infty} pe^{-(1+x)p} \frac{\cos(x)}{1+x} dx$
- ■ $F'(p) = -\int_0^{+\infty} e^{-(1+x)p} \cos(x) dx$

Explication : Un corrigé détaillé est disponible dans le CC1 2019 à l'exo 2.3 :
http ://math.univ-lyon1.fr/ dabrowski/enseignement/Math4/CC1-20190225Correction.pdf

---

Question 6 [3 points] Quelle domination peut-on utiliser pour montrer la continuité de l'intégrale à paramètre $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-(1+x)p} \frac{\cos(x)}{1+x} dx$ pour $p \geqslant 1$?

- ☐ $e^{-(1+x)p} \frac{\cos(x)}{1+x} \leqslant \frac{1}{1+x}$
- ■ $\left| e^{-(1+x)p} \frac{\cos(x)}{1+x} \right| \leqslant e^{-x}$
- ☐ $\left| e^{-(1+x)p} \frac{\cos(x)}{1+x} \right| \leqslant e^{-(1+x)p}$
- ☐ $e^{-(1+x)p} \frac{\cos(x)}{1+x} \leqslant \frac{\cos(x)}{1+x}$
- ☐ $e^{-(1+x)p} \frac{\cos(x)}{1+x} \leqslant \cos(x)$
- ☐ $\left| e^{-(1+x)p} \frac{\cos(x)}{1+x} \right| \leqslant |\cos(x)|$
- ☐ $\left| e^{-(1+x)p} \frac{\cos(x)}{1+x} \right| \leqslant \frac{1}{1+x}$
- ☐ $\left| e^{-(1+x)p} \frac{\cos(x)}{1+x} \right| \leqslant \frac{|\cos(x)|}{1+x}$
- ☐ aucune des autres réponses

Question 7 Parmi les fonctions suivantes, laquelle est équivalente à $f(x) = x^2 - x\sin(x)$ en $x \to 0$?

- ☐ $-\frac{x^3}{2}$
- ■ $\frac{x^4}{6}$
- ☐ $\frac{x^4}{3}$
- ☐ $x^2 - x^2$
- ☐ 0
- ☐ $-\frac{x^4}{3}$
- ☐ $-\frac{x^4}{6}$
- ☐ $-x$

Explication : Par le cours, en $x \to 0$, $\sin(x) = x - x^3/6 + o(x^3)$ donc $f(x) = x^4/6 + o(x^4)$

Question 8 Quelle est la nature de l'intégrale suivante $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2} dt$?

- ■ convergente en 0 et convergente en $+\infty$
- ☐ divergente en 0 et divergente en $+\infty$
- ☐ convergente en 0 et divergente en $+\infty$
- ☐ divergente en 0 et convergente en $+\infty$
