Veillez à bien noircir les cases.

Codez votre numéro d'étudiant ci-contre ⟶
et écrivez votre nom et prénom ci-dessous :

Nom et prénom :

....

Attention à ne pas vous tromper, toute erreur invalide la copie !

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Math4 – Préparation 2 du QCM1 du 25-28 Février 2020

Règlement – L'épreuve dure 30 minutes. Les calculatrices sont interdites. **Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.** Il n'est admis de consulter aucun document.
Les questions ont toute une seule bonne réponse, qui vaut **2 points** (pour les 4 questions les plus simples) ou **3 points** (pour les 4 questions les plus difficiles).

Attention, il y a 2 questions de cours pour lesquels une réponse fausse vaut **-1 point**.

Cochez une seule réponse par question.

Question 1 [2 points] Laquelle parmi les intégrales suivantes est convergente ?

■ $\int_1^{+\infty} e^{-2t}dt$ ☐ $\int_1^{+\infty} e^{t}dt$ ☐ $\int_0^{1} \frac{1}{t}dt$ ☐ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$

Question 2 [2 points] Parmi les fonctions suivantes, laquelle est équivalente à $f(x) = \frac{1}{1-x} - 1$ en $x \to 0$?

☐ 1 ☐ $-\frac{x}{2}$ ■ x ☐ $-\frac{x^2}{2}$ ☐ 0 ☐ $-x$ ☐ $\frac{x}{2}$ ☐ $\frac{x^2}{2}$

Question 3 Que vaut l'intégrale $I = \int_1^x \frac{\sin(t)}{t}dt$ pour $x > 1$?

☐ $I = \sin(1) - \frac{\sin(x)}{x} + \int_1^x \frac{\sin(t)}{t^2}dt$ ☐ $I = \frac{\sin(x)}{x} - \sin(1) + \int_1^x \frac{\sin(t)}{t^2}dt$

☐ $I = \sin(1) - \frac{\sin(x)}{x} + \int_1^x \frac{\sin(t)}{t^2}dt$ ☐ $I = \frac{\cos(x)}{x} - \cos(1) - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt$

☐ $I = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ ■ $I = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt$

☐ $I = \frac{\cos(x)}{x} - \cos(1) - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ ☐ $I = \frac{\sin(x)}{x} - \sin(1) + \int_1^x \frac{\sin(t)}{t^2}dt$

Explication : cd TD1 ex 4 pour la correction

Question 4 Quelle est la nature de l'intégrale suivante $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$?

■ convergente ☐ absolument convergente ☐ divergente ☐ aucune des autres réponses

Explication : cd TD1 ex 4 pour la correction

Question 5 [3 points] Si on peut appliquer le théorème de dérivation à l'intégrale à paramètre

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)}dx,$$

quel résultat obtiendra-t-on pour la dérivée de F ?

- ☐ $F'(t) = -\int_0^{+\infty} \frac{t}{x(1+x^2t^2)(1+x^2)}dx$
- ☐ $F'(t) = -\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+x^2)}dx$
- ☐ $F'(t) = -\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)(1+3x^2)}{x^2(1+x^2)^2}dx$
- ☐ $F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)(1+3x^2)}{x^2(1+x^2)^2}dx$
- ☐ $F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{x(1+x^2t^2)(1+x^2)}dx$
- ■ $F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+x^2)}dx$

Explication : Un corrigé partiel est disponible dans le CC1 2016 à l'exo 3.2 :
http ://math.univ-lyon1.fr/ dabrowski/enseignement/Math4/Math4-2016-CC-2-corrige.pdf

---

Question 6 [3 points] Quelle domination peut-on utiliser pour montrer la continuité de l'intégrale à paramètre

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)}dx,$$

pour $t \in \mathbb{R}, x > 0$?

- ☐ $\frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)} \leqslant \arctan(xt)$
- ■ $\left|\frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)}\right| \leqslant \frac{\pi}{2x^3}$
- ☐ $\frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)} \leqslant \frac{\pi}{2x^3}$
- ☐ $\left|\frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}$
- ☐ $\frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)} \leqslant \frac{\pi}{2x}$
- ☐ $\left|\frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)}\right| \leqslant |\arctan(xt)|$
- ☐ $\frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)} \leqslant \frac{\pi}{2}$
- ☐ $\left|\frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)}\right| \leqslant \frac{\pi}{2x}$
- ☐ aucune des autres réponses

Explication : Un corrigé partiel est disponible dans le CC1 2016 à l'exo 3.2 (la domination est donnée avec le calcul de la dérivée, pour lequel il manque d'ailleurs la domination de la dérivée oubliée par l'enseignant de l'époque, mais la domination de la fonction est suffisante pour la continuité, comme ici) :
http ://math.univ-lyon1.fr/ dabrowski/enseignement/Math4/Math4-2016-CC-2-corrige.pdf

---

Question 7 Parmi les fonctions suivantes, laquelle est équivalente à $f(x) = x - x\cos(x)$ en $x \to 0$?

☐ $-\frac{x^3}{2}$ ☐ $x - x^2$ ☐ $\frac{x^4}{3}$ ☐ $x - x$ ☐ 0 ☐ $-\frac{x^4}{3}$ ■ $\frac{x^3}{2}$ ☐ x

Explication : Par le cours, en $x \to 0$, $\cos(x) = 1 - x^2/2 + o(x^2)$ donc $f(x) = x^3/2 + o(x^3)$

Question 8 Quelle est la nature de l'intégrale suivante $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}e^{-t}dt$?

- ☐ convergente en 0 et convergente en $+\infty$
- ☐ divergente en 0 et divergente en $+\infty$
- ☐ convergente en 0 et divergente en $+\infty$
- ■ divergente en 0 et convergente en $+\infty$
