Veillez à bien noircir les cases.

Codez votre numéro d'étudiant ci-contre $\longrightarrow$
et écrivez votre nom et prénom ci-dessous :

Nom et prénom :

....

Attention à ne pas vous tromper, toute erreur invalide la copie !

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Math4 – Préparation 2 du QCM1 du 25-28 Février 2020

Règlement – L'épreuve dure 30 minutes. Les calculatrices sont interdites. **Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.** Il n'est admis de consulter aucun document.
Les questions ont toute une seule bonne réponse, qui vaut **2 points** (pour les 4 questions les plus simples) ou **3 points** (pour les 4 questions les plus difficiles).

Attention, il y a 2 questions de cours pour lesquels une réponse fausse vaut **-1 point**.

Cochez une seule réponse par question.

Question 1 [2 points] Laquelle parmi les intégrales suivantes est convergente ?

☐ $\int_1^{+\infty} e^{-2t}dt$ ☐ $\int_1^{+\infty} e^{t}dt$ ☐ $\int_0^{1} \frac{1}{t}dt$ ☐ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$

Question 2 [2 points] Parmi les fonctions suivantes, laquelle est équivalente à $f(x) = \frac{1}{1-x} - 1$ en $x \to 0$?

☐ 1 ☐ $-\frac{x}{2}$ ☐ x ☐ $-\frac{x^2}{2}$ ☐ 0 ☐ $-x$ ☐ $\frac{x}{2}$ ☐ $\frac{x^2}{2}$

Question 3 Que vaut l'intégrale $I = \int_1^x \frac{\sin(t)}{t}dt$ pour $x > 1$?

☐ $I = \sin(1) - \frac{\sin(x)}{x} + \int_1^x \frac{\sin(t)}{t^2}dt$ ☐ $I = \frac{\sin(x)}{x} - \sin(1) + \int_1^x \frac{\sin(t)}{t^2}dt$
☐ $I = \sin(1) - \frac{\sin(x)}{x} + \int_1^x \frac{\sin(t)}{t^2}dt$ ☐ $I = \frac{\cos(x)}{x} - \cos(1) - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt$
☐ $I = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ ☐ $I = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt$
☐ $I = \frac{\cos(x)}{x} - \cos(1) - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ ☐ $I = \frac{\sin(x)}{x} - \sin(1) + \int_1^x \frac{\sin(t)}{t^2}dt$

Question 4 Quelle est la nature de l'intégrale suivante $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$?

☐ convergente ☐ absolument convergente ☐ divergente ☐ aucune des autres réponses

---

Question 5 [3 points] Si on peut appliquer le théorème de dérivation à l'intégrale à paramètre

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)} dx,$$

quel résultat obtiendra-t-on pour la dérivée de F ?

- ☐ $F'(t) = -\int_0^{+\infty} \frac{t}{x(1+x^2t^2)(1+x^2)} dx$
- ☐ $F'(t) = -\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+x^2)} dx$
- ☐ $F'(t) = -\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)(1+3x^2)}{x^2(1+x^2)^2} dx$
- ☐ $F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)(1+3x^2)}{x^2(1+x^2)^2} dx$
- ☐ $F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{x(1+x^2t^2)(1+x^2)} dx$
- ☐ $F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+x^2)} dx$

Question 6 [3 points] Quelle domination peut-on utiliser pour montrer la continuité de l'intégrale à paramètre

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)} dx,$$

pour $t \in \mathbb{R}, x > 0$?

- ☐ $\frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)} \leqslant \arctan(xt)$
- ☐ $\left|\frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)}\right| \leqslant \frac{\pi}{2x^3}$
- ☐ $\frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)} \leqslant \frac{\pi}{2x^3}$
- ☐ $\left|\frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}$
- ☐ $\frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)} \leqslant \frac{\pi}{2x}$
- ☐ $\left|\frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)}\right| \leqslant |\arctan(xt)|$
- ☐ $\frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)} \leqslant \frac{\pi}{2}$
- ☐ $\left|\frac{\arctan(xt)}{x(1+x^2)}\right| \leqslant \frac{\pi}{2x}$
- ☐ aucune des autres réponses

Question 7 Parmi les fonctions suivantes, laquelle est équivalente à $f(x) = x - x\cos(x)$ en $x \to 0$?

- ☐ $-\frac{x^3}{2}$
- ☐ $x - x^2$
- ☐ $\frac{x^4}{3}$
- ☐ $x - x$
- ☐ 0
- ☐ $-\frac{x^4}{3}$
- ☐ $\frac{x^3}{2}$
- ☐ x

Question 8 Quelle est la nature de l'intégrale suivante $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} e^{-t} dt$?

- ☐ convergente en 0 et convergente en $+\infty$
- ☐ divergente en 0 et divergente en $+\infty$
- ☐ convergente en 0 et divergente en $+\infty$
- ☐ divergente en 0 et convergente en $+\infty$
