Séminaire BOURBAKI Avril 2021
73^{e} année, 2020–2021, n^{o} 1177

LE PRINCIPE D'INCERTITUDE FRACTAL, [d'après Bourgain, Dyatlov, Jin, Nonnenmacher, Zahl]

par **Nguyen Viet Dang**

1. INTRODUCTION

Le principe d'incertitude joue un rôle central en physique mathématique, dans de nombreuses questions d'analyse des phénomènes quantiques, analyse harmonique et également dans le traitement du signal. De façon intuitive, ce principe nous dit qu'on ne peut pas localiser simultanément la position et le moment d'une particule quantique. Depuis 2016, il s'est développé autour de Dyatlov un nouveau principe d'incertitude dit "fractal". Il s'agit d'un énoncé d'analyse harmonique sur la droite réelle qui interdit à une fonction dans L^2 d'être localisée simultanément en position et en fréquence près d'ensembles fractals vérifiant certaines hypothèses de porosité. Techniquement, on s'intéresse à des problèmes de décroissance de la transformée de Fourier quand on la restreint en position et en moment à des $\hbar$-voisinages d'ensembles fractals, $\hbar \in (0,1]$ est un petit paramètre qui joue le rôle de la constante de Planck.

Ce principe développé par Dyatlov en collaboration avec Bourgain, Jin, Nonnenmacher et Zahl met clairement en évidence la nécessité d'utiliser des méthodes nouvelles issues de l'analyse harmonique, la combinatoire additive et la théorie ergodique pour progresser dans l'analyse spectrale, car les outils micro-locaux ne suffisent plus : l'analyse fine d'intégrales oscillantes au voisinage d'ensembles fractals va au delà des techniques usuelles de phase stationnaire.

Dans cet exposé basé en partie sur les excellents articles de revue de Dyatlov (2017, 2019), nous allons décrire ce principe d'incertitude et ses applications spectaculaires à des problèmes d'analyse géométrique sur des surfaces à courbure négative constante :

1. une preuve de trou spectral pour la fonction zêta de Selberg sur les surfaces hyperboliques convexes cocompactes, sans aucune hypothèse sur l'exposant critique de l'ensemble limite,
2. des nouvelles estimées de prolongement unique pour les fonctions propres du laplacien sur des surfaces hyperboliques améliorant considérablement ce qu'on pouvait obtenir classiquement avec les méthodes d'inégalités de Carleman. La méthode utilisée permet d'en déduire presque immédiatement que les mesures

semiclassiques, associées au laplacien Δ_g sur une surface hyperbolique compacte M, chargent tous les ouverts du cotangent unitaire S^*M. Ce résultat sur les mesures semiclassiques est une percée spectaculaire depuis les travaux d'Anantharaman (2008), Anantharaman et Nonnenmacher (2007) et Rivière (2010) autour des conjectures d'unique ergodicité quantique.

Signalons que Dyatlov, Jin et Nonnenmacher (2019) sont parvenus à étendre l'estimée de prolongement unique et le résultat sur le support des mesures semiclassiques au cas des surfaces à courbure négative stricte variable. Pour garder la taille de notre rapport dans des proportions raisonnables, nous ne discuterons que très brièvement de ce résultat important.

Mais avant de commencer, il s'agit de rappeler certaines notions qui apparaissent dans le titre de l'exposé, il s'agit des fractales et du principe d'incertitude.

1.1. Le principe d'incertitude traditionnel.

Rappelons le principe d'incertitude traditionnel. Notons $\widehat{p} = i\hbar\partial_x$ l'opérateur de moment et $\widehat{x}$ l'opérateur de position qui n'est rien d'autre que l'opérateur de multiplication par x. Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, on sait par le théorème de Plancherel que $\widehat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$. Le principe d'incertitude en mécanique quantique s'exprime sous la forme d'une inégalité qui quantifie le fait qu'on ne peut pas localiser simultanément le support de φ en position et le support de $\widehat{\varphi}$ en moment. Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\langle \widehat{x} \rangle_\varphi = \langle \varphi, \widehat{x}\varphi \rangle = 0$, $\langle \widehat{p} \rangle_\varphi = \langle \varphi, \widehat{p}\varphi \rangle = 0$, alors :

$$\hbar \langle \varphi, \varphi \rangle = \operatorname{Im} \left(\langle \varphi, [\widehat{p}, \widehat{x}]\varphi \rangle \right) \leqslant 2\|\widehat{x}\varphi\|_{L^2} \|\widehat{p}\varphi\|_{L^2},$$

où on a utilisé la fameuse relation d'anticommutation $[\widehat{p}, \widehat{x}] = i\hbar$ en mécanique quantique (relation de structure dans l'algèbre de Heisenberg) et l'inégalité de Cauchy–Schwartz. Comme $\langle \widehat{x} \rangle_\varphi = \langle \widehat{p} \rangle_\varphi = 0$, on sait que $\|\widehat{x}\varphi\|_{L^2}$ et $\|\widehat{p}\varphi\|_{L^2}$ sont des variances quantiques Δx et Δp donc on réécrit l'inégalité du principe d'incertitude comme

$$\boxed{\frac{\hbar}{2} \leqslant \Delta x \Delta p.} \tag{1}$$

Dans la version semiclassique, on peut aussi reformuler le principe d'incertitude sur $[0, \hbar]$ de la façon suivante. Soit $1_{[0,\hbar]}$, l'indicatrice de l'intervalle $[0, \hbar]$, alors on voudrait étudier la norme d'opérateur de $1_{[0,\hbar]}\mathcal{F}_\hbar 1_{[0,\hbar]}$ où $\mathcal{F}_\hbar(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i\xi x}{\hbar}} f(x)dx$ est la transformée de Fourier semiclassique [(1)]. Une majoration grossière nous donne :

$$\|1_{[0,\hbar]}\mathcal{F}_\hbar 1_{[0,\hbar]}\|_{L^2\to L^2} \leqslant \|1_{[0,\hbar]}\|_{L^\infty\to L^2} \|\mathcal{F}_\hbar\|_{L^1\to L^\infty} \|1_{[0,\hbar]}\|_{L^2\to L^1} \leqslant \hbar^{\frac{1}{2}} \left(C\hbar^{-\frac{1}{2}} \right) \hbar^{\frac{1}{2}} = C\hbar^{\frac{1}{2}}$$

où la constante C ne dépend pas de $\hbar$ et les termes aux deux extrémités se contrôlent avec Cauchy–Schwarz (on aurait pu utiliser l'inégalité de Hölder mais ça n'aurait pas amélioré les estimées).

En général, le principe d'incertitude fractal concerne une localisation en position et en fréquence dans des $\hbar$-voisinages de fractals X et Y, au lieu de l'intervalle $[0, \hbar]$. De

1. Ici la transformée de Fourier semiclassique est normalisée pour être unitaire sur L^2.

façon imprécise, on dira que des ensembles (X, Y) en position, fréquence vérifient un principe d'incertitude fractal s'il existe des constantes $C, \beta > 0$ telles que pour tout $\hbar \in (0, 1]$, on ait une estimée de la forme :

$$\boxed{\|1_{Y+[-\hbar,\hbar]}\mathcal{F}_\hbar 1_{X+[-\hbar,\hbar]}\|_{L^2\to L^2} \leqslant C\hbar^\beta}. \tag{2}$$

Nous n'irons pas plus loin dans la description des principes d'incertitudes classiques car nous n'en aurons pas besoin dans l'exposé, nous rappellerons seulement les principes de prolongement uniques dus à Logvinenko et Sereda (1974) car ils joueront un rôle central dans la preuve du principe d'incertitude fractal.

1.2. Prolongement unique quantitatif : exemples simples.

Dans ce paragraphe, nous donnons des exemples élémentaires du principe de prolongement unique qui va revenir à plusieurs reprises dans notre exposé aussi bien dans la preuve du principe d'incertitude fractal que dans les estimées sur les fonctions propres du laplacien sur les surfaces hyperboliques.

1.2.1. *L'espace de Paley–Wiener.* — Nos exemples reposent sur l'espace de Paley–Wiener des fonctions à transformée de Fourier à support compact. Le premier principe d'incertitude se lit de la façon suivante :

Lemme 1.1 (Paley–Wiener). — *Une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f}$ est à support compacte ne peut pas être à support compact sauf si $f = 0$* [2].

Le théorème de Paley Wiener que nous venons de mentionner est la première manifestation du principe d'incertitude. L'objectif de ce paragraphe est de chercher une version plus quantitative de l'énoncé ci-dessus. Pour illustrer le type d'idée que nous allons utiliser, nous allons prouver un théorème de prolongement unique qui illustre de façon quantitative l'observation ci-dessus et dont la maxime peut se résumer de la façon suivante : *Quand le spectre est borné, alors la taille de la fonction f est contrôlée par la taille de sa restriction à tout intervalle I.* Ce principe joue un rôle central dans la preuve du principe d'incertitude fractal et il est très utile en théorie du contrôle car il répond à la question : étant donné f satisfaisant une contrainte, par exemple f solution d'une EDP ou $\widehat{f}$ supportée dans un certain ensemble, si on sait que $f|_U$ est petit en norme L^2 sur un certain ensemble U, que peut-on dire de f partout ?

Lemme 1.2 (Prolongement unique élémentaire). — *Soient un ensemble $Y \subset \mathbb{R}$* ***borné*** *et I un intervalle. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\hbar \in (0, +\infty)$ on ait*

$$supp\left(\widehat{f}\right) \subset \hbar^{-1}Y \implies \|f\|_{L^2(\hbar I)} \geqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3}$$

2. Soit une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est supportée par un ensemble Y **borné**. On sait par le théorème de Paley–Wiener que f est analytique donc f ne peut pas s'annuler sur un intervalle I car sinon f serait identiquement nulle.

Nous faisons dépendre l'inégalité (3) d'un paramètre d'échelle $\hbar$ pour que le lecteur puisse comprendre comment l'estimée se comporte par changement d'échelle. Ce type de raisonnement va revenir sous forme amplifiée dans la section 3. Nous allons employer des outils élémentaires des fonctions à transformée de Fourier à support borné dans la preuve :

1. les inégalités de Bernstein qui contrôlent la norme sup des dérivées (voir MEYER, 1998, p. 17),
2. la compacité (propriété de Montel).

Une fonction L^2 dont le spectre est borné n'a pas le droit de trop osciller et donc ses dérivées sont contrôlées par sa norme L^2. Cette observation est réalisée de façon quantitative par le lemme de Bernstein (voir par exemple MEYER, 1998, p. 17), qui est une manifestation élémentaire du principe d'incertitude. Rappelons de quoi il s'agit. Supposons que l'ensemble Y du lemme 1.2 soit contenu dans $[-R, R]$. Étant donnée $\widehat{f}$ supportée par Y,

$$\begin{aligned}\|\partial_x^k f\|_{L^\infty} &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (i\xi)^k e^{i\xi.x} \widehat{f}(\xi) d\xi \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \left\langle 1_Y(i\xi)^k e^{ix\xi}, \widehat{f} \right\rangle \right| \\ &\leqslant \|(i\xi)^k 1_Y(\xi) e^{ix\xi}\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant R^k \|1_Y\|_{L^2(\mathbb{R})} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

comme $|(i\xi)^k 1_Y(\xi) e^{ix\xi}| \leqslant R^k 1_Y(\xi)$.

Comme la norme L^∞ de f' est bornée, f a ses accroissements bornés donc elle est uniformément continue. Toute suite bornée dans L^2 dont le support de Fourier est contenu dans Y est donc bornée dans C^1 et par Ascoli–Arzela, on peut extraire une sous-suite qui converge dans L^2. Vérifions que la limite f a sa transformée de Fourier à support dans Y. Si $f_n \to f$ dans $L^2(\mathbb{R})$ alors $f_n \to f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et donc pour toute fonction test φ telle que $\widehat{\varphi}$ n'est pas supportée dans Y, on a $0 = \langle f_n, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$ donc $\langle f, \varphi \rangle = \left\langle \widehat{f}, \widehat{\varphi} \right\rangle = 0$ et $\widehat{f}$ est supportée par Y. Donc on a bien la propriété de compacité.

Démonstration. — Maintenant on peut prouver très simplement le lemme 1.2. Remarquons qu'il suffit de fixer le facteur de changement d'échelle $\hbar = 1$ et de montrer que $\operatorname{supp}\left(\widehat{f}\right) \subset Y \implies \|f\|_{L^2(I)} \geqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$, le cas général s'en déduit par un simple changement de variables. Supposons par l'absurde que l'inégalité précédente est fausse. Soit $R > 0$ tel que $Y \subset [-R, R]$. On aura une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\|f_n\|_{L^2} = 1, \operatorname{supp}(\widehat{f_n}) \subset [-R, R], \forall n \in \mathbb{N}$ et $\|f_n\|_{L^2(I)} \to 0$. Par la propriété de Montel, on peut extraire une sous-suite qui converge dans L^2 vers f telle que $\|f\|_{L^2} = 1, \operatorname{supp}(\widehat{f_n}) \subset [-R, R]$ et $\|f\|_{L^2(I)} = 0$, donc la restriction de f à I vaut 0. Or f est analytique par Paley Wiener donc $f = 0$, contradiction. □

1.3. Les fractales, notions basiques.

Passons maintenant en revue deux exemples célèbres, classiques et importants de fractales pour se donner une intuition : le Cantor et les ensembles limites de Schottky. Ensuite nous présenterons les puissantes notions de régularité et porosité nécessaires à la formulation du principe d'incertitude fractal.

1.3.1. *Exemples de base de fractales autosimilaires, le Cantor.* — Des exemples célèbres de fractals sont l'ensemble de Cantor, le tapis de Sierpinski et le carré de Sierpinski qui ont la particularité d'être tous les trois des fractales dits "autosimilaires" : on peut les générer de façon algébro-dynamique en itérant des applications affines. Décrivant l'exemple des Cantor en suivant la présentation de GOUËZEL (2019) : soit l'ensemble des deux contractions affines $\{x \mapsto \lambda x, x \mapsto 1 + \lambda(1 - x)\}$ qui ont pour points fixes $\{0, 1\}$. Ces deux contractions vont être notées par (T_a, T_b) où on va penser à $\{a, b\}$ comme un alphabet de deux lettres. On va créer une suite $K_0, K_1, \cdots, K_n$ de compacts emboîtés qui vont converger (pour la topologie de Hausdorff) vers l'ensemble de Cantor K_∞. On considère $K_n = \cup_{w \in \{a,b\}^n} T_w (K_0)$ où K_0 est l'intervalle $[0, 1]$. Donc K_n est une union d'intervalles disjoints codés par des mots de longueur n que l'on peut former avec les lettres $\{a, b\}$, à chaque mot correspond une suite d'itération des applications affines. On voit immédiatement que les K_n sont bien emboîtés [(3)], par stabilité des applications affines et que leur intersection notée K_∞ définit l'ensemble de Cantor. Remarquons aussi que par construction, les bords des intervalles composant chaque K_n sont préservés par les itérations et sont donc contenus dans K_∞.

Une autre observation qui est utile pour la suite, c'est qu'on peut représenter les différents intervalles qui composent K_n par des feuilles d'un arbre binaire qui encode la combinatoire des mots. Les éléments de K_∞ peuvent donc être visualisés comme des chemins partant de la racine vers l'infini dans un arbre binaire infini.

1.3.2. *Les ensembles limites de groupes de Schottky.* — Nous allons également employer des "mots" pour décrire ce genre de fractales. Ces ensembles limites sont des fractales qui jouent un rôle central dans les résultats sur la fonction zêta de Selberg. Le groupe $SL_2(\mathbb{R})$ agit par isométries sur le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ par homographies et il induit une action sur $\mathbb{R}$, vu comme bord à l'infini de l'espace hyperbolique, de la forme $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ agit sur $x \in \mathbb{R}$ par $\gamma.x = \frac{ax+b}{cx+d}$.

On se donne $2r$ intervalles disjoints dans $\mathbb{R}$. Comme plus haut dans l'ensemble de Cantor, on va coder l'action des éléments $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2r}$ par des mots dans l'alphabet à $2r$ éléments $\mathcal{A} = \{1, \ldots, 2r\}$. On munit $\mathcal{A}$ d'une involution $a \in \mathcal{A} \mapsto \overline{a} \in \mathcal{A}$, qui agit comme

$$1, \ldots, r \mapsto r + 1, \ldots, 2r \text{ et } r + 1, \ldots, 2r \mapsto 1, \ldots, r.$$

On se donne $2r$ homographies $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2r}$ vérifiant la propriété $\forall a \in \mathcal{A}, \gamma_{\overline{a}} = \gamma_a^{-1}$ et γ_a envoie $\overline{R} \setminus I_{\overline{a}}$ dans l'intérieur de I_a.

Donc comme pour le Cantor, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit des mots admissibles $w = a_1 \ldots a_n$ où $a_{n+1} \neq \overline{a_n}$ [(4)] et l'ensemble des mots admissibles de longueur n est noté $\mathcal{W}_n$. Pour chaque mot $w \in \mathcal{W}_n$, on forme un intervalle $\gamma_{a_1} \ldots \gamma_{a_{n-1}} (I_{a_n})$. Les éléments $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2r}$ engendrent un sous groupe $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{R})$, de la même façon que pour le Cantor,

3. L'observation centrale c'est que T_a (resp. T_b) envoie l'intervalle $[0, 1]$ dans $[0, \lambda]$ (resp. $[1 - \lambda, 1]$).
4. On veut éviter de composer un élément de $\mathcal{A}$ avec son inverse.

on va définir l'ensemble limite Λ_Γ comme l'intersection

$$\Lambda_\Gamma = \bigcap_n \left(\cup_{w\in\mathcal{W}_n} I_w\right). \tag{4}$$

Le sous groupe Γ agit sur l'ensemble limite Λ_Γ et en anticipant sur la terminologie introduite dans le paragraphe 1.4.3, le fractal Λ_Γ est δ-régulier pour un certain $\delta \in (0,1)$. Par conséquent, on verra par la suite que Λ_Γ est également ν-poreux pour un certain $\nu < 1$.

En fait, il y a une relation entre les propriétés de régularité de l'ensemble limite Λ_Γ, le rayon de convergence des séries de Poincaré sur la variété hyperbolique $\Gamma \setminus \mathbb{H}^2$ et le domaine du plan complexe où la fonction zêta de Selberg est holomorphe sans pôles. Nous reviendrons sur ces aspects dans le paragraphe 4.3.3 tout en encourageant le lecteur curieux à aller voir le superbe ouvrage de Borthwick (2007).

1.4. Notions quantitatives sur les fractales.

L'objet de cette sous-section est de décrire de façon quantitative les propriétés caractéristiques des fractales dans $\mathbb{R}$. On commence par rappeler la notion de dimension de Minkowski puis on va introduire les notions de régularité et de porosité qui joueront un rôle central dans l'énoncé du principe d'incertitude fractal.

1.4.1. *Dimension de Minkowski des fractales.* — On veut mesurer la taille des fractales. Une idée naive serait de chercher à définir une notion de dimension des fractales. Une notion classique utilisée pour mesurer la régularité d'ensembles fractales est la dimension de Minkowski comme décrite dans Tricot (1999, p. 25), qui est définie pour des ensembles $X \subset \mathbb{R}$ comme :

$$\dim_M(X) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(1 + \frac{\log|X_\varepsilon|}{|\log(\varepsilon)|}\right) \tag{5}$$

quand la limite existe et où $X_\varepsilon = X + [-\varepsilon, \varepsilon]$ est un ε-voisinage de X et $|.|$ désigne la mesure de Lebesgue. Donc par définition, si Λ est un ensemble de dimension de Minkowski $\delta \in [0,1)$, alors le volume du $\hbar$-voisinage de Λ décroît comme $\hbar^{1-\delta}$. Cette conséquence sur le volume des voisinages sera appliquée aux ensembles limites de Schottky grâce à un résultat de Sullivan qui a estimé leur dimension de Minkowski. Ce qui implique quand l'exposant $\delta < \frac{1}{2}$ qu'on a automatiquement un principe d'incertitude fractal parce que le volume du $\hbar$-voisinage de Λ_Γ est suffisamment petit. Nous le verrons plus bas au paragraphe 1.4.2.

Exemple 1.3 (Volume du voisinage d'un Cantor.) — Par le résultat sur la dimension de Minkowski du Cantor X de paramètre $\lambda \in (0,1)$, on trouve immédiatement que le volume du $\hbar$-voisinage de X décroît comme $\hbar^{1-|\frac{\log(2)}{\log(\lambda)}|}$. On voit donc sans surprise que plus $\lambda \in (0,1)$ est petit, plus le volume décroît vite.

Faisons une remarque utile qui relie de façon un peu plus explicite la notion de dimension Minkowski et l'entropie topologique [5]. Si un ensemble X est de dimension de Minkowski $\delta > 0$, alors on appelle $N(\varepsilon)$ le nombre minimal d'intervalles de taille ε pour recouvrir X et on a une définition "entropique" de $\dim_M(X)$ dans Tricot (1999, p. 26) :

$$\boxed{\dim_M(X) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\log N(\varepsilon)}{|\log(\varepsilon)|}.} \tag{6}$$

Exemple 1.4 (Dimension de Minkowski des Cantor). — Pour un ensemble de Cantor X de paramètre $\lambda \in (0,1)$, la dimension de Minkowski vaut $|\frac{\log(2)}{\log(\lambda)}|$. Pour le voir facilement, observer grâce au codage par l'arbre dyadique que pour $\varepsilon \sim \lambda^n$, on peut recouvrir le Cantor avec 2^n intervalles de largeur $\sim \lambda^n$ donc $\limsup |\frac{\log(2^n)}{\log(\lambda^n)}| = |\frac{\log(2)}{\log(\lambda)}|$.

La notion de dimension de Minkowski jouera aussi un rôle important pour le principe d'incertitude fractal discret.

1.4.2. *Estimation grossière pour le Cantor de paramètre λ.* — Pour illustrer la majoration de volume du voisinage du Cantor, nous allons chercher à montrer une estimation grossière sur $\|1_{X_\hbar} \mathcal{F}_\hbar 1_{X_\hbar}\|_{L^2 \to L^2}$. Ici nous voulons illustrer le fait que lorsque le paramètre $\lambda > 0$ générant le Cantor est suffisamment petit, la décroissance du volume de $X_\hbar = X + [-\hbar, \hbar]$ montre que $\|1_{X_\hbar} \mathcal{F}_\hbar 1_{X_\hbar}\|_{L^2 \to L^2} \leqslant C\hbar^\beta$ pour $\beta = \frac{1}{2} - \delta > 0$.

Partons d'un Cantor X de dimension de Minkowski $\delta = |\frac{\log(2)}{\log(\lambda)}|$, on sait que le volume du $\hbar$-voisinage $X_\hbar$ décroît comme $\hbar^{1-\delta}$. Donc on obtient [6] :

$$\begin{aligned} \|1_{X_\hbar} \mathcal{F}_\hbar 1_{X_\hbar}\|_{L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})} &\leqslant \|1_{X_\hbar}\|_{L^\infty \to L^2} \|\mathcal{F}_\hbar\|_{L^1 \to L^\infty} \|1_{X_\hbar}\|_{L^2 \to L^1} \\ &\leqslant \hbar^{\frac{1-\delta}{2}} \left(C\hbar^{-\frac{1}{2}} \right) \hbar^{\frac{1-\delta}{2}} = C\hbar^{\frac{1}{2}-\delta} \end{aligned}$$

donc on voit que la dimension de Minkowski *critique* pour lequel il n'y a plus de décroissance est bien $\delta = \frac{1}{2}$. Pourtant quand $\delta = \frac{1}{2}$, l'apport des méthodes de Bourgain–Dyatlov est de mettre en évidence que la structure poreuse du Cantor donne encore de la décroissance en $\hbar^\beta$ où $\beta > 0$.

1.4.3. *Notions de porosité et de régularité.* — Dans les travaux de Dyatlov et ses collaborateurs, au lieu de considérer des classes de fractales autosimilaires qui forment une classe restreinte de fractales, on considère une notion très générale de fractales définies à l'aide des notions de *régularité d'Ahlfors–David* ou bien de *porosité*. C'est cette dernière notion qui semble la plus commode lorsqu'il s'agira de décrire le principe d'incertitude fractal.

5. que l'on verra dans la dernière partie au paragraphe 4.6.1.
6. On aurait pu faire un enchaînement Hölder, Hausdorff–Young, Hölder sans rien gagner en décroissance.

1.4.4. *Porosité.* — Une notion utile pour étudier les fractales est la notion d'ensembles poreux, voir DYATLOV et JIN (2018b, Def 5.1 p. 317), qui est très simple et très générale. Elle décrit de façon unifiée des fractales pas forcément autosimilaires ainsi que leurs $\hbar$-voisinages qui sont en fait les ensembles pertinents pour le principe d'incertitude fractal. Il n'y a plus besoin de connaître la définition des fractales autosimilaires.

DÉFINITION 1.5 (Les ensembles ν-poreux). — *Soit $X \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide fermé et $\nu > 0$, $\alpha_{min} \leqslant \alpha_{max} \leqslant \infty$. On dira que X est ν-poreux d'une échelle α_{min} à α_{max} si pour chaque intervalle I tel que $\alpha_{min} \leqslant |I| \leqslant \alpha_{max}$, il existe un intervalle $J \subset I$ tel que $|J| = \nu|I|$ et $X \cap J = \emptyset$.*

Ces ensembles ont des trous qui sont mesurés de façon quantitative.

Exemple 1.6 (Porosité du Cantor). — Supposons que l'on considère l'ensemble triadique de Cantor X, alors cherchons quelle est sa porosité ν. Il est évident que X est ν-poreux de 0 à 1 pour tout $\nu < \frac{1}{5}$.

Pour visualiser pourquoi le $\frac{1}{5}$, considérer l'intervalle $[-\frac{1}{9}, \frac{4}{9}]$, on voit qu'on peut lui retirer $[-\frac{1}{9}, 0-]$, $[\frac{1}{3}+, \frac{4}{9}]$ ou $[\frac{1}{9}+, \frac{2}{9}-]$ qui font moins de $\frac{1}{5}$ fois la largeur de l'intervalle original.

1.4.5. *Régularité d'Ahlfors–David.* — Une deuxième définition possible des fractales emploie la notion d'ensemble δ-régulier DYATLOV et ZAHL (2016, def. 1.4, p. 1060).

DÉFINITION 1.7 (Les ensembles δ-réguliers). — *Soit $X \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide fermé et $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, $C_R \geqslant 1$, $\alpha_{min} \leqslant \alpha_{max} \leqslant \infty$. On dira que X est δ-régulier avec constante C_R de l'échelle α_{min} à α_{max} si il existe une mesure localement finie μ_X supportée par X telle que, pour chaque intervalle I centré en un point de X et tel que $\alpha_{min} \leqslant |I| \leqslant \alpha_{max}$, on ait*

$$C_R^{-1}|I|^\delta \leqslant \mu_X(I) \leqslant C_R|I|^\delta. \tag{7}$$

Intuitivement, α_{min} agit comme un cut-off ultraviolet qui nous dit à quelle échelle microscopique on s'arrête de tester.

Exemple 1.8 (Relation avec la régularité de Hölder–Zygmund par changement d'échelle)

Dans cet exemple, on aimerait relier la notion de δ-régularité sur l'échelle $(0, 1]$ d'un ensemble X avec la régularité de Hölder–Zygmund de la mesure μ_X de la définition 1.7, dans l'esprit des travaux de MEYER (1998, p. 6). On note $\mathcal{C}^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ l'espace de Hölder–Zygmund de régularité α. Quand on teste la régularité de Hölder d'une mesure $\mu \in \mathrm{Mes}(\mathbb{R})$ (ou d'une distribution), on va tester toutes les échelles de $(0, 1]$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_{<0}$, une mesure $\mu \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R})$ si la famille de mesures [7] :

$$\Big(\lambda^{-\alpha}\mu(\lambda(. - x) + x)\Big)_{\lambda\in(0,1],x\in K} \tag{8}$$

est bornée pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$.

7. Coïncident avec les distributions positives par un théorème classique de Schwartz.

En particulier, quand l'ensemble X est borné et δ-régulier sur une échelle $(0,1]$, soit μ_X la mesure à support compact de la définition 1.7, pour toute fonction test $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$:

$$|\langle \mu_X(\lambda(.-x)+x), \varphi\rangle| = \lambda^{-1}|\mu_X(\varphi(\lambda^{-1}(.-x)+x))| \leqslant C\lambda^{-1-\delta}\|\varphi\|_\infty$$

où la constante C ne dépend que de la taille du support de φ. Donc, on trouve que $\lambda^{1+\delta}\mu_X(\lambda(.-x)+x)$, $x \in X$ est une famille bornée de distributions, uniformément en $x \in \operatorname{supp}(\mu_X) \subset X$ et donc $\mu_X \in \mathcal{C}^{-1-\delta}$.

1.5. Enoncé du principe d'incertitude fractal.

DÉFINITION 1.9. — *Soit* $(X_\hbar, Y_\hbar)$ *deux familles d'ensembles qui peuvent dépendre d'un petit paramètre* $\hbar$[8]. *Nous dirons que le couple* (X, Y) *satisfait le principe d'incertitude fractal d'exposant* $\beta \geqslant 0$, *si*

$$\|1_Y \mathcal{F}_h 1_X\|_{L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})} = \mathcal{O}(h^\beta). \tag{9}$$

Nous verrons dans la suite qu'on peut formuler de façon équivalente le principe comme

$$\operatorname{supp}\left(\widehat{f}\right) \subset \hbar^{-1}Y \implies \|f\|_{L^2(X)} \leqslant C\hbar^\beta\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

où $\widehat{f}$ est la transformée de Fourier classique, non semiclassique.

Le premier résultat s'énonce de la façon suivante :

THÉORÈME 1.10 (BOURGAIN et DYATLOV, 2018). — *Soit* $0 \leqslant \nu < 1$, $\hbar \in (0,1)$ *et supposons que*
- — $X \subset [0,1]$ *est* ν*-poreux d'une échelle* $\hbar$ *à* 1
- — $Y \subset [0,\hbar^{-1}]$ *est* ν*-poreux d'une échelle* 1 *à* $\hbar^{-1}$

Alors il existe β *dépendant de* ν *tel que pour tout* $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\widehat{f} \subset Y \implies \|f\|_{L^2(X)} \leqslant C\hbar^\beta\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \tag{10}$$

ici $L^2(X)$ *est défini en utilisant la mesure de Lebesgue.*

Ce qui est remarquable dans le théorème ci-dessus c'est que la constante C ne dépend pas de (X, Y) mais seulement de la porosité.

Remarque 1.11. — Il y a une relation entre les ensembles réguliers et poreux décrits au sens du paragraphe 1.4.3. C'est pourquoi le principe d'incertitude fractal s'énonce aussi bien pour des ensembles δ-réguliers (X, Y), $\delta \in [0,1)$ de constante C_R et la constante C dans l'inégalité (10) ne dépend pas des ensembles X, Y.

Pour le moment, il existe quatre approches pour montrer le principe d'incertitude fractal.
- — La première qui remonte au papier de DYATLOV et ZAHL (2016) consiste à prouver des estimées d'énergie additive et repose sur la combinatoire additive, cette méthode s'étend aux ensembles de Cantor discrets.

8. Dans la suite, ils seront souvent des $\hbar$-voisinages de fractals.

— La seconde méthode introduite dans Bourgain et Dyatlov (2018) repose sur des estimées de prolongement unique pour des fonctions dont la transformée de Fourier est à spectre parcimonieux et emploie de façon cruciale les multiplicateurs de Beurling et Malliavin (1962), nous décrirons cette approche en détail dans notre rapport.
— La troisième méthode utilise la notion de décroissance de la transformée de Fourier des mesures portées par les fractales, on se ramène à des estimées somme-produit de Bourgain (2010) appliquées à des intégrales oscillantes pour montrer le principe d'incertitude fractal. Cette méthode a été essentiellement explorée par Bourgain et Dyatlov (2017), Li (2018) et Li, Naud, Pan et al. (2021).
— Enfin, la dernière méthode mise en oeuvre par Dyatlov et Jin (2018a) montre un principe d'incertitude fractal en s'appuyant sur la méthode de Dolgopyat.

Mentionnons également certaines extensions du théorème 1.10.
— Han et Schlag (2020) établissent un principe d'incertitude pour des fractals en dimension supérieure qui ressemblent à des produits cartésiens d'ensembles poreux 1-dimensionnels,
— Jin et Zhang (2019) établissent une version plus quantitative du théorème 3.1 en rendant effective la constante β de l'énoncé,
— enfin un récent article de Cladek et Tao (2020) étudie le principe d'incertitude fractal dans certaines situations en dimension impaires en s'appuyant sur des nouvelles bornes d'énergie additive.

1.5.1. *Relations entre la δ-régularité et la ν-porosité.* — Dans ce paragraphe, on compare les notions de δ-régularité et ν-porosité.

Discutons du sens δ-régulier implique ν-poreux pour $\delta < 1$. Si $\delta < 1$, intuitivement la mesure de X tend vers 0 plus vite que la masse usuelle de l'intervalle donc on s'attend à ce que notre ensemble ait des trous. Raisonnons par l'absurde. En fait on va supposer que quel que soit ν assez petit et un C assez grand, l'ensemble X n'est pas ν-poreux et en déduire une contradiction.

Fixer $T \in \mathbb{N}$ que nous choisirons plus tard en fonction de δ, C_R et posons $\nu = (3T)^{-1}$ et on va supposer que X n'est pas ν-poreux. Posons $C = 3T$, et choisissons un intervalle quelconque $I = [a, b]$ de taille entre $C\alpha_{min}$ et α_{max}. On partitionne I en T intervalles $I_1, \ldots, I_T$ chacun de longueur $\frac{|I|}{T}$, $I = [a_1, a_2] \cup [a_2, a_3] \cup \cdots \cup [a_T, b]$.

Par l'absurde, tout intervalle J de taille $|J| = \frac{1}{3T}|I|$ va intersecter X. Donc ceci doit être vrai pour chaque tiers du milieu de chaque intervalle $(I_i)_{i=1}^T$ un peu comme dans la construction du triadique de Cantor. Donc pour chaque intervalle $I_i = [a_i, a_{i+1}]$, on a un intervalle $I_i' = [a_i + \frac{a_{i+1}-a_i}{3}, a_{i+1} - \frac{a_{i+1}-a_i}{3}]$ qui contient un point de X. Comme $\cup_{i=1}^T I_i' \subset I$, on va utiliser la propriété de δ-régularité de X. On va l'appliquer à I et à **l'union disjointe** $\cup_{i=1}^T I_i' \subset I$.

Déjà il existe une mesure μ portée par X telle que $\mu(I) \leqslant C_R|I|^\delta$.

D'un autre côté, chaque I_i' est de longueur $\frac{|I|}{3T}$ par construction. Or par définition de $C = 3T$, on a $\frac{|I|}{3T} = C^{-1}|I| \geqslant \alpha_{min}$ donc on peut appliquer la borne inférieure de

δ-régularité à chaque sous intervalle $\alpha_{min} \leqslant |I'_i| \leqslant |I| \leqslant \alpha_{max}$. Ce qui donne une borne de type $C_R^{-1}|I'_i|^\delta \leqslant \mu(I'_i)$. En sommant sur les $i = 1, \ldots, T$, on en déduit l'inégalité

$$TC_R^{-1}\left(\frac{|I|}{3T}\right)^\delta = \sum_{i=1}^{T} C_R^{-1}|I'_i|^\delta \leqslant \sum_{i=1}^{T} \mu(I'_i) \leqslant \mu(I) \leqslant C_R|I|^\delta \tag{11}$$

Mais l'information clef que l'exposant $\delta < 1$ implique qu'en choisissant T assez grand on peut rendre $TC_R^{-1}\left(\frac{|I|}{3T}\right)^\delta > C_R|I|^\delta$ ce qui conduit à une contradiction.

Plan de l'exposé.

Dans la section 2, nous décrivons un exemple simple, mais riche en phénomènes, de principe d'incertitude fractal discret où on restreint une fonction et sa transformée de Fourier discrète à un Cantor discret.

Puis dans la section 3 qui forme le coeur de notre rapport, nous donnons une preuve simplifiée et informelle du théorème 1.10 qui donne le principe d'incertitude fractal sur $\mathbb{R}$.

Enfin dans la dernière section 4, nous décrivons certaines applications du principe d'incertitude fractal et le lecteur pressé de voir ces applications peut sauter les deux prochaines sections pour aller directement à la fin car les trois parties sont indépendantes.

Je remercie chaleureusement Semyon Dyatlov, Benjamin Jaye, Frédéric Naud, Gabriel Rivière et Nicolas Bourbaki pour leurs explications, remarques ou corrections qui m'ont beaucoup aidé dans la préparation de ce rapport et l'amélioration de la présentation.

2. LE PRINCIPE D'INCERTITUDE FRACTAL POUR LES ENSEMBLES DE CANTOR DISCRETS.

Le but de cette section est de présenter une version discrète du principe d'incertitude fractal due à Dyatlov et Jin (2017), dont la preuve est relativement élémentaire, pour la transformée de Fourier discrète où les fractales sont des Cantor discret. L'intérêt du cas discret est d'illustrer de façon simple toute la phénoménologie du principe d'incertitude fractal.

2.0.1. *Le tore discret et écriture des nombres en base p.* — On commence par se placer sur le tore discret $\mathbb{Z}_{p^n} = \frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}}$ où on pose $N = p^n$ et on va passer à la limite $n \to +\infty$. Les éléments de $\mathbb{Z}_{p^n}$ sont les classes $\{0, 1, \ldots, p^n - 1\}$, il y en a en tout p^n.

Lemme 2.1. — *Observons que tout nombre $k \in \{0, 1, \ldots, p^n - 1\}$ peut se* ***décomposer uniquement*** *en*

$$k = a_0 + a_1 p + \cdots + a_{n-1} p^{n-1} \tag{12}$$

où les $a_i \in \{0, \ldots, p-1\}$ [9].

Nous noterons donc $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ l'élément correspondant à k. En fait, on pourrait aussi interpréter $\mathbb{Z}_{p^n}$ comme une discrétisation du cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ identifié à l'intervalle $[0, 1)$ [10] où on écrirait des nombres décimaux en base p, dans ce cas l'élément k est identifié à $0, a_0 \ldots a_{n-1}$.

2.0.2. *Sous groupes remarquables de* $\mathbb{Z}_{p^n}$ *et fibration discrète.* — Il existe un morphisme injectif i de groupes de $\mathbb{Z}_{p^k}$ dans $\mathbb{Z}_{p^n}$ défini par $i\colon x \mapsto p^{n-k}x$. Dans l'écriture en base p, cela équivaut à faire $(a_0 \ldots a_{k-1}) \mapsto (\underbrace{0\ldots0}_{n-k}\ a_0 \ldots a_{k-1})$. De plus, on a morphisme surjectif $\pi\colon x \in \mathbb{Z}_{p^n} \mapsto x \bmod(p^{n-k}) \in \mathbb{Z}_{p^{n-k}}$, tel que l'image de i est le noyau de π. Concrètement, la projection π se lit dans la représentation en base p comme $(a_0 \ldots a_{n-1}) \mapsto (a_0 \ldots a_{n-k-1})$ où l'on garde les $n-k$ premiers chiffres. Donc on trouve une suite exacte courte : $0 \to \mathbb{Z}_{p^k} \to \mathbb{Z}_{p^n} \to \mathbb{Z}_{p^n}/\mathbb{Z}_{p^k} \to 0$ qui est scindée et admet comme section $\sigma\colon (a_0 \ldots a_{n-k-1}) \mapsto (a_0 \ldots a_{n-k-1}0 \ldots 0)$ en représentation en base p. Cette structure de fibration discrète est à l'origine de la représentation de la matrice de transformée de Fourier discrète comme composition de matrices de transformée de Fourier par blocs. Cette décomposition explique la transformée de Fourier rapide et aussi la propriété de sous-multiplicativité qui nous permettra de montrer le principe d'incertitude fractal discret.

2.0.3. *Le Cantor discret et sa dimension.* — Etant donné $\mathcal{A} \subset \{0, \ldots, p-1\}$ qu'on appelle **alphabet**, on définit la notion de Cantor discret comme l'ensemble des éléments de $\{0, 1, \ldots, p^n - 1\}$ qui s'écrivent en base p en utilisant seulement des lettres de l'alphabet $\mathcal{A}$: $\mathcal{C}_n = \{a_0 + a_1 p + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}\}$. Un alphabet $\mathcal{A}$ étant donné, on note $\mathcal{C}_n$ l'ensemble de Cantor dans $\mathbb{Z}_{p^n}$. Montrons une propriété centrale pour la suite, la propriété **d'hérédité** pour les Cantor discrets.

Lemme 2.2 (Propriété d'hérédité des Cantor discrets). — *Soit* $n = n_1 + n_2$ *où* n_1, n_2 *sont des entiers. Alors il existe deux bijections de* $\mathcal{C}_n$ *dans* $\mathcal{C}_{n_1} \times \mathcal{C}_{n_2}$ *:*

$$(a_0 \ldots a_{n_1-1}), (b_0 \ldots b_{n_2-1}) \in \mathcal{C}_{n_1} \times \mathcal{C}_{n_2} \mapsto (a_0 \ldots a_{n_1-1} b_0 \ldots b_{n_2-1}) \in \mathcal{C}_n$$
$$(a_0 \ldots a_{n_1-1}), (b_0 \ldots b_{n_2-1}) \in \mathcal{C}_{n_1} \times \mathcal{C}_{n_2} \mapsto (b_0 \ldots b_{n_2-1} a_0 \ldots a_{n_1-1}) \in \mathcal{C}_n.$$

La preuve est évidente et on remarque qu'en utilisant des shuffles (battages), on peut mélanger les lettres quand on assemble les deux expressions décimales.

Dans la représentation du Cantor en termes de groupes cyclique $\mathbb{Z}_{p^n}$, on a une autre représentation de ces opérations comme les applications

$$(k_1, k_2) \in \mathcal{C}_{n_1} \times \mathcal{C}_{n_1} \mapsto k_1 + p^{n_1}k_2 \in \mathcal{C}_n, \ \ (k_1, k_2) \in \mathcal{C}_{n_1} \times \mathcal{C}_{n_1} \mapsto p^{n_2}k_1 + k_2 \in \mathcal{C}_n.$$

9. Il s'agit d'écrire un nombre k en base p. Cette décomposition s'obtient grâce à l'algorithme de division Euclidienne. En effet a_0 est le reste de la division Euclidienne de k par p, puis si $\frac{k-a_0}{p} \geqslant p$ alors on réitère l'algorithme pour $\frac{k-a_0}{p}$ sinon on arrête l'algorithme.

10. le 1 est enlevé puisque identifié par quotient avec 0. Ce point de vue rend le cas discret proche de l'intuition du Cantor dans $[0, 1]$.

Nous allons définir un analogue de la dimension de Minkowski du Cantor discret $\mathcal{C}_n$ que nous noterons $\delta > 0$. Une façon de faire est de relier ça directement à la définition du Cantor dans le continuum. On imagine que les points dans $\mathbb{Z}_{p^n}$ sont équirépartis sur le cercle $\mathbb{S}^1$ et espacés de $\frac{2\pi}{p^n}$. Cherchons à recouvrir les éléments du Cantor $\mathcal{C}_n$ par des intervalles de largeur exactement $\frac{\pi}{p^n}$ [11] et estimons le nombre minimal de tels intervalles. Soit $|\mathcal{A}| = \ell < p$ le nombre de lettres dans notre alphabet, il y a exactement ℓ^n éléments dans notre Cantor et donc ℓ^n intervalles nécessaires pour recouvrir le Cantor, ces intervalles sont disjoints deux à deux. Par analogie avec la définition de mesure de Minkowski dans le continuum, on va chercher à déterminer les exposants $m \geqslant 0$ tels que $\sum_{\mathcal{C}_n \subset \cup I, |I|=\frac{\pi}{p^n}} |I|^m = \ell^n \left(\frac{\pi}{p^n}\right)^m$ soit fini uniformément quand $n \to +\infty$, la dimension δ des $\mathcal{C}_n$ sera interprétée comme la valeur critique de ces exposants. Comme $\ell^n \left(\frac{\pi}{p^n}\right)^m = \pi^m e^{n(\log(\ell) - m\log(p))}$ on voit que $m \in [\frac{\log(\ell)}{\log(p)}, +\infty)$ pour que $\lim_{n\to+\infty} \ell^n \left(\frac{\pi}{p^n}\right)^m < +\infty$. Donc l'exposant optimal est $\delta = \frac{\log(\ell)}{\log(p)}$ qui est bien la dimension de Minkowski (et aussi de Hausdorff) du Cantor.

2.0.4. *La transformée de Fourier discrète et le principe d'incertitude fractal.* — On se donne une fonction φ dans $L^2(\mathbb{S}^1)$, un signal 2π-périodique. Par l'analyse de Fourier d'une fonction périodique, on sait que son spectre est contenu dans $\mathbb{Z}$. Maintenant soit N un entier positif qu'on supposera pair dans ce paragraphe pour simplifier les explications. Si on filtre toutes les fréquences sauf celles entre $[-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1]$ en appliquant un filtre passe bande, alors on peut déterminer $\varphi \in L^2(\mathbb{S}^1)$ de façon unique par N échantillons $\{0, \frac{2\pi}{N}, \dots, \frac{2\pi(N-1)}{N}\}$ équidistribués sur le cercle $\mathbb{S}^1$ de périmètre 2π que l'on va identifier avec le groupe cyclique $G = \frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}$ (vu comme groupe abélien fini). On sait que l'espace des caractères de $\frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}$ sont les racines de l'unité $(e^{\frac{2\pi i k.}{N}})_{k=0}^{N-1}$ et que l'opération qui reconstitue les fréquences du signal à partir des N-échantillons n'est rien d'autre que la transformée de Fourier discrète :

$$\mathcal{F}_N : u \in L^2(\frac{\mathbb{Z}}{N\mathbb{Z}}) \mapsto \widehat{u}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x\in\mathbb{Z}_N} u(x) e^{\frac{2\pi i k x}{N}}. \tag{13}$$

Les racines de l'unité $(e^{\frac{2\pi i k.}{N}})_{k=0}^{N-1}$, munies de la multiplication, forment également un groupe abélien fini $\widehat{G}$, le groupe des caractères de $G = \mathbb{Z}_N$, qui est isomorphe au groupe cyclique $\mathbb{Z}_N$. On en déduit que la transformée de Fourier agit comme une **isométrie** $\mathcal{F}_N : L^2(\mathbb{Z}_N) \to L^2(\mathbb{Z}_N)$. La preuve de ce fait classique est une conséquence immédiate du fait que $(\frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi i k.}{N}})_{k=0}^{N-1}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{Z}_N)$. Le paramètre N qui représente la qualité de l'échantillonnage est identifié dans les applications en quantification géométrique avec l'inverse d'un paramètre semiclassique $\hbar$. De façon générale, la transformée de Fourier discrète est un cas particulier de quantification géométrique d'un symplectomorphisme linéaire (dans le cas de Fourier, c'est la transformée de Legendre).

11. La largeur est strictement plus petite que le pas.

Définition 2.3. — *Étant donné le Cantor* $\mathcal{C}_n \subset \mathbb{Z}_{p^n}$*, on définit l'opérateur :*

$$U_n = 1_{\mathcal{C}_n} \mathcal{F}_{p^n} 1_{\mathcal{C}_n} \colon L^2(\mathbb{Z}_{p^n}) \to L^2(\mathbb{Z}_{p^n}). \tag{14}$$

2.1. Preuve du principe d'incertitude fractal discret.

Pour simplifier notre exposé, on va supposer que $p-1 \notin \mathcal{A}$ donc la lettre la plus grande dans l'alphabet est inférieure ou égale à $p-2$.

Théorème 2.4 (principe d'incertitude fractal pour le Cantor fini)
Soit U_n *l'opérateur définit ci dessus et* $\delta = \frac{\log(\ell)}{\log(p)}$, $N = p^n$*. Alors on a*

$$\|U_n\|_{L^2(\mathbb{Z}_N) \to L^2(\mathbb{Z}_N)} \leqslant C N^{-\beta} \tag{15}$$

où l'exposant $\beta > \sup(0, \frac{1}{2} - \delta)$.

On voit que si $\delta \geqslant \frac{1}{2}$, le principe d'incertitude fractal dit qu'il y a une petite décroissance exponentielle. Remarquons que la borne $\|U_n\|_{L^2(\mathbb{Z}_N) \to L^2(\mathbb{Z}_N)} \leqslant C N^{-(\frac{1}{2} - \delta)}$ est triviale à cause du lemme suivant :

Lemme 2.5. — *Pour tout* n, $N = p^n$, $\delta = \frac{\log(\ell)}{\log(p)}$*, on peut évaluer exactement la norme de Hilbert–Schmidt de* U_n *:*

$$\|U_n\|_{HS} = \sqrt{Tr\,(U_n^* U_n)} = N^{\frac{1}{2} - \delta}. \tag{16}$$

Ce lemme montre deux phénomènes sur lesquels nous aimerions insister

1. d'une part, lorsqu'il y a peu de lettres dans l'alphabet $\mathcal{A}$, intuitivement le Cantor est petit et on a automatiquement de la décroissance exponentielle venant de la petite masse. C'est exactement l'analogue des bornes du principe d'incertitude fractal dans $\mathbb{R}$ quand le volume de $X + [-\hbar, \hbar]$ et $Y + [-\hbar, \hbar]$ est petit. Cependant, le principe d'incertitude fractal nous donne une meilleure décroissance encore que les estimées de masse mais il faut exploiter des phénomènes plus subtils reliés à la structure fractale du Cantor,
2. d'autre part, si $\delta \leqslant \frac{1}{2}$ alors l'estimée ci-dessus ne nous donne aucune décroissance car elle ne voit que la masse et n'exploite pas la structure poreuse du Cantor. Nous verrons que même quand $\delta \leqslant \frac{1}{2}$, l'opérateur U_n décroit en norme $L^2 \to L^2$.

L'hypothèse sur l'exposant critique δ est l'exact analogue des hypothèses de pression dans le cas continu.

Démonstration. — L'observation clef, c'est que la matrice M_N de la transformée de Fourier discrète $\mathcal{F}_N \colon L^2(\mathbb{Z}_N) \to L^2(\mathbb{Z}_N)$ dans la base orthonormée $(\frac{1}{\sqrt{N}}\delta_k(.))_{k=0}^{N-1}$ vérifie la relation exacte $(M_N)_i^j \overline{(M_N)_j^i} = \frac{1}{N}$. On en déduit la relation

$$(1_{\mathcal{C}_n} \mathcal{F}_N^* 1_{\mathcal{C}_n} \mathcal{F}_N 1_{\mathcal{C}_n})_i^i = \frac{1_{\mathcal{C}_n}(i)|\mathcal{C}_n|}{N} \implies Tr\,(U_n^* U_n) = \frac{\ell^{2n}}{N}$$

donc $\|U_n\|_{HS} = \frac{\ell^n}{p^{\frac{n}{2}}} = (\frac{\ell}{p})^n p^{\frac{n}{2}} = N^{\frac{1}{2} - \delta}$. □

2.2. La sous-multiplicativité et le principe d'incertitude fractal pour le Cantor discret.

2.2.1. *Un modèle jouet de sous-multiplicativité.* — Soit $[0,1]^{d_1}, [0,1]^{d_2}$ deux cubes unité et $\mathcal{C}_1 \subset [0,1]^{d_1}, \mathcal{C}_2 \subset [0,1]^{d_2}$ deux sous ensembles des cubes respectifs et soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \subset [0,1]^{d_1+d_2}$ le produit cartésien des deux ensembles. On définit par

$$\mathcal{F}_\hbar \colon u \in L^2(\mathbb{R}^{d_i}) \mapsto \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{d_i}{2}}} \int_{\mathbb{T}^{d_i}} u(x) e^{-i\langle \xi . x\rangle} d^{d_i}x \in L^2(\mathbb{R}^{d_i})$$

la transformée de Fourier semiclassique normalisée pour être unitaire. La sous-multiplicativité se voit de façon frappante comme conséquence du découplage des variables :

Lemme 2.6 (Lemme de sous-multiplicativité première version)
Soit $V_i = 1_{\mathcal{C}_i} \mathcal{F}_\hbar 1_{\mathcal{C}_i} \colon L^2(\mathbb{R}^{d_i}) \to L^2(\mathbb{R}^{d_i}), i = 1,2$ *et* $V = 1_{\mathcal{C}} \mathcal{F}_\hbar 1_{\mathcal{C}} \colon L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$, *alors on a l'estimation*

$$\|V\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^{d_1})\to L^2(\mathbb{R}^{d_1})} \|V_2\|_{L^2(\mathbb{R}^{d_2})\to L^2(\mathbb{R}^{d_2})}. \tag{17}$$

Démonstration. — Notons x (resp. y) la variable de $\mathbb{R}^{d_1}$ (resp. $\mathbb{R}^{d_2}$) et (x,y) la variable collective de $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$. La preuve est une conséquence de l'identité de Fubini et de la séparation des variables. On observe que $1_{\mathcal{C}}(x,y) = \left(1_{\mathcal{C}_1}(x) \otimes 1_{[0,1]^{d_2}}(y)\right)\left(1_{[0,1]^{d_1}}(x) \otimes 1_{\mathcal{C}_2}(y)\right)$ et on note

$$\mathcal{F}_{\hbar,x}(u)(\xi,y) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{d_1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{d_1}} u(x,y) e^{-i\langle \xi . x\rangle} d^{d_1}x$$

et

$$\mathcal{F}_{\hbar,y}(u)(x,\eta) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{d_2}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} u(x,y) e^{-i\langle \eta . y\rangle} d^{d_2}y,$$

les transformées de Fourier partielles par rapport aux variables respectives x et y :

$$1_{\mathcal{C}} \mathcal{F}_\hbar 1_{\mathcal{C}} u = (1_{\mathcal{C}_1,\xi} \mathcal{F}_{\hbar,x} 1_{\mathcal{C}_1,x})(1_{\mathcal{C}_2,\eta} \mathcal{F}_{\hbar,y} 1_{\mathcal{C}_2,y})$$

où les deux opérateurs entre parenthèse commutent.

Enfin, il suffit d'observer que :

$$\begin{aligned} \|1_{\mathcal{C}_1,\xi} \mathcal{F}_{\hbar,x} 1_{\mathcal{C}_1,x}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} &= \|V_1\|_{L^2(\mathbb{R}^{d_1})\to L^2(\mathbb{R}^{d_1})} \\ \|1_{\mathcal{C}_2,\eta} \mathcal{F}_{\hbar,y} 1_{\mathcal{C}_2,y}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} &= \|V_2\|_{L^2(\mathbb{R}^{d_2})\to L^2(\mathbb{R}^{d_2})} \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure comme les opérateurs bornés $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ forment une algèbre de Banach. □

2.2.2. *Lemme de sous-multiplicativité version discrète.* — La version discrète de la sous-multiplicativité repose sur les mêmes idées que le calcul précédent. Elle utilise le fait que la transformée de Fourier se factorise comme produit de deux matrices par blocs qui est l'idée centrale qui fait marcher la transformée de Fourier rapide en traitement du signal.

La transformée de Fourier rapide. — Dans cette partie, on pose $N = p^n$. Nous voulons motiver la preuve de la sous-multiplicativité en faisant une analogie (bien remarquée par Dyatlov) avec la transformée de Fourier rapide. Soit $G = \mathbb{Z}_{p^n}$ notre groupe abélien fini et $H = \mathbb{Z}_{p^k}$ un sous groupe de G comme dans le paragraphe 2.0.2. Le principe de la transformée de Fourier rapide, comme rappelé dans l'article de Lafforgue (2009) [12], consiste à écrire $\mathcal{F}_{p^n}$ comme le produit de deux matrices par blocs qui sont essentiellement les matrices $\mathcal{F}_{p^k}$ et $\mathcal{F}_{p^{n-k}}$ de transformée de Fourier sur $\mathbb{Z}_{p^k}$ et $\mathbb{Z}_{p^n}/\mathbb{Z}_{p^k} \simeq \mathbb{Z}_{p^{n-k}}$ respectivement.

L'idée est de décomposer une intégrale sur $\mathbb{Z}_{p^n}$ comme une intégrale sur les fibres $\mathbb{Z}_{p^k}$ puis ensuite on intègre sur la base $\mathbb{Z}_{p^n}/\mathbb{Z}_{p^k} \simeq \mathbb{Z}_{p^{n-k}}$.

Concrètement, on peut écrire $\mathcal{F}_{p^n}u(\xi)$ en décomposant la variable de Fourier $\xi = \xi_1 + p^k\xi_2 \in \{0, \dots, p^n - 1\}$ où $\xi_1 \in \{0, \dots, p^k - 1\}$, $\xi_2 \in \{0, \dots, p^{n-k} - 1\}$ [13] :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{p^n}u(\xi_1 + p^k\xi_2) &= \frac{1}{\sqrt{p^n}} \sum_{x\in\{0,\dots,p^n-1\}} e^{\frac{2i\pi(\xi_1+p^k\xi_2)x}{p^n}} u(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{p^k}}\frac{1}{\sqrt{p^{n-k}}} \underbrace{\sum_{x_2\in\{0,\dots,p^{n-k}-1\}}}_{\text{somme base}} \underbrace{\sum_{x_1\in\{0,\dots,p^k-1\}}}_{\text{somme fibre}} e^{2i\pi\frac{(x_2+p^{n-k}x_1)(\xi_1+p^k\xi_2)}{p^n}} u(x_2 + p^{n-k}x_1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{p^{n-k}}} \sum_{x_2\in\{0,\dots,p^{n-k}-1\}} e^{\frac{2i\pi\xi_2x_2}{p^{n-k}}} \left(\frac{1}{\sqrt{p^k}} \sum_{x_1\in\{0,\dots,p^k-1\}} e^{\frac{2i\pi\xi_1x_1}{p^k}} u(x_2 + p^{n-k}x_1) \right)
\end{aligned}$$

où on a regroupé la somme sur tous les éléments en une somme double sur des classes d'équivalences par rapport à la fibre puis par rapport à la base puisque à x_2 fixé, les éléments $x_2 + p^{n-k}x_1$ varient dans la fibre lorsque x_1 varie dans $\{0, \dots, p^k - 1\}$ et on a utilisé un petit miracle arithmétique qui donne la relation :

$$e^{2i\pi\frac{(x_2+p^{n-k}x_1)(\xi_1+p^k\xi_2)}{p^n}} = e^{\frac{2i\pi x_2\xi_2}{p^{n-k}}} e^{\frac{2i\pi x_1\xi_1}{p^k}}.$$

On a donc décomposé la transformée de Fourier sur $\mathcal{F}_{p^n}$ comme la composée de $\mathcal{F}_{p^k}$ et $\mathcal{F}_{p^{n-k}}$ de transformée de Fourier sur $\mathbb{Z}_{p^k}$ et $\mathbb{Z}_{p^n}/\mathbb{Z}_{p^k} \simeq \mathbb{Z}_{p^{n-k}}$ respectivement.

Lemme 2.7. — *Soit $n = n_1 + n_2$, on a*

$$\|U_n\|_{L^2(\mathbb{Z}_{p^n})\to L^2(\mathbb{Z}_{p^n})} \leqslant \|U_{n_1}\|_{L^2(\mathbb{Z}_{p^{n_1}})\to L^2(\mathbb{Z}_{p^{n_1}})} \|U_{n_2}\|_{L^2(\mathbb{Z}_{p^{n_2}})\to L^2(\mathbb{Z}_{p^{n_2}})}. \tag{18}$$

Démonstration. — Soit $n = n_1 + n_2$ où n_1, n_2 entiers. Pour $(x, y) \in \mathbb{Z}_{p^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{n_2}}$, on associe l'élément $(x + p^{n_1}y) \in \mathbb{Z}_{p^n} \simeq \mathbb{Z}_{p^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{n_2}}$. On a une première identitée de Fubini sur la norme L^2 :

$$\boxed{\|u\|^2_{L^2(\mathbb{Z}_{p^n})} = \sum_{z=0}^{p^n-1} |u(z)|^2 = \sum_{x=0}^{p^{n_1}-1} \sum_{y=0}^{p^{n_2}-1} |u(x + p^{n_1}y)|^2 = \|u(. + p^{n_1}.)\|^2_{L^2(\mathbb{Z}_{p^{n_1}}\times\mathbb{Z}_{p^{n_2}})}.}$$

12. basé sur des notes de Mestre.

13. d'une certaine façon, c'est la fibration duale qui apparaît en Fourier où on voit $\mathbb{Z}_{p^n}$ comme fibré au dessus de $\mathbb{Z}_{p^k}$.

De façon symétrique, en inversant les facteurs dans la façon de représenter $\mathbb{Z}_{p^n} \simeq \mathbb{Z}_{p^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{n_2}}$, il vient :

$$\boxed{\|u\|^2_{L^2(\mathbb{Z}_{p^n})} = \|u(p^{n_2}.+.)\|^2_{L^2(\mathbb{Z}_{p^{n_2}}\times\mathbb{Z}_{p^{n_1}})}.} \tag{19}$$

Observons que l'on a un phénomène analogue de découplage de la transformée de Fourier sur $\mathbb{Z}_{p^n}$ en termes des transformées de Fourier partielles, pour $(k_1,k_2) \in \mathbb{Z}_{p^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{n_2}}$: $\mathcal{F}_{p^n}(u)(p^{n_2}k_1+k_2) = (\mathcal{F}_{p^{n_1},x_1}\mathcal{F}_{p^{n_2},x_2}u(.+p^{n_1}.))\,(p^{n_2}k_1+k_2)$.

L'indicatrice du Cantor a la même décomposition

$$\begin{aligned} 1_{\mathcal{C}_n}(x_1+p^{n_1}x_2) &= 1_{\mathcal{C}_{n_1}}(x_1)1_{\mathcal{C}_{n_2}}(p^{n_1}x_2) \\ 1_{\mathcal{C}_n}(p^{n_2}k_1+k_2) &= 1_{\mathcal{C}_{n_1}}(p^{n_2}k_1)1_{\mathcal{C}_{n_2}}(k_2). \end{aligned}$$

Donc au final, on a la factorisation

$$U_n u(p^{n_2}.+.) = \left(1_{\mathcal{C}_{n_1}}(p^{n_2}.)\mathcal{F}_{p^{n_1},x}1_{\mathcal{C}_{n_1}}\right)\left(1_{\mathcal{C}_{n_2}}\mathcal{F}_{p^{n_2},y}1_{\mathcal{C}_{n_2}}(p^{n_1}.)\right).$$

Il suffit de se convaincre que

$$\|\left(1_{\mathcal{C}_{n_1}}(p^{n_2}.)\mathcal{F}_{p^{n_1},x}1_{\mathcal{C}_{n_1}}\right)\|_{L^2(\mathbb{Z}_{p^n})\to L^2(\mathbb{Z}_{p^n})} = \|U_{n_1}\|_{L^2(\mathbb{Z}_{p^{n_1}})\to L^2(\mathbb{Z}_{p^{n_1}})}$$

et

$$\|\left(1_{\mathcal{C}_{n_2}}\mathcal{F}_{p^{n_2},y}1_{\mathcal{C}_{n_2}}(p^{n_1}.)\right)\|_{L^2(\mathbb{Z}_{p^n})\to L^2(\mathbb{Z}_{p^n})} = \|U_{n_2}\|_{L^2(\mathbb{Z}_{p^{n_2}})\to L^2(\mathbb{Z}_{p^{n_2}})}$$

pour en déduire la propriété de sous-multiplicativité demandée. □

2.2.3. *Conclusion de la preuve du principe d'incertitude fractal pour Cantor discrets.* — Maintenant, si on arrive à prouver que $\|U_n\| < 1$ pour un certain n, alors la sous-multiplicativité nous permet de montrer le principe d'incertitude fractal : $\|U_n\|_{L^2\to L^2} \leqslant Cp^{-n\beta}$ pour un $\beta > 0$ par le lemme de Fekete qui montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\|U_n\|_{L^2\to L^2}}{n\log(p)} = \inf_{n\geqslant 1} \frac{\|U_n\|_{L^2\to L^2}}{n\log(p)}. \tag{20}$$

Déjà la transformée de Fourier $\mathcal{F}_{p^n}$ étant unitaire et les multiplications par les indicatrices étant contractantes, on en déduit que U_n est contractante $\|U_n\| \leqslant 1$. Par l'absurde supposons que $\|U_n u\| = \|u\|$ pour un certain u.

Lemme 2.8 (Les éléments optimaux sont de support très concentrés)
Si $\|U_n u\| = \|u\|$ alors u et $\widehat{u}$ sont supportées par le Cantor.

Démonstration. — Déjà montrons que $\|U_n u\| = \|u\|$ implique que u est supportée par le Cantor $\mathcal{C}_n$ donc $1_{\mathcal{C}_n}u = u$. Donc $\|U_n u\|^2 = \|u\|^2 = \|1_{\mathcal{C}_n}u\|^2 + \|1_{\mathcal{C}_n^c}u\|^2$ par Pythagore et comme $\|U_n u\|^2 \leqslant \|1_{\mathcal{C}_n}u\|^2$, on trouve $\|1_{\mathcal{C}_n}\mathcal{F}_N 1_{\mathcal{C}_n}u\|^2 - \|1_{\mathcal{C}_n}u\|^2 = \|1_{\mathcal{C}_n^c}u\|^2 \leqslant 0 \implies \|1_{\mathcal{C}_n^c}u\|^2 = 0$. Donc nécessairement u doit être supporté par le Cantor $\mathcal{C}_n$. Maintenant, montrons que $\widehat{u}$ est aussi porté par $\mathcal{C}_n$. Par Plancherel puis Pythagore, on a $\|\widehat{u}\|^2 = \|U_n u\|^2 = \|1_{\mathcal{C}_n}\mathcal{F}u\|^2 = \|\widehat{u}\|^2 - \|1_{\mathcal{C}_n^c}\widehat{u}\|^2$ donc $\|1_{\mathcal{C}_n^c}\widehat{u}\|^2 = 0$. □

Lemme 2.9 (Incertitude algébrique). — *Soit $\ell < p$ et $p-1 \notin \mathcal{A}$. Il existe n assez grand tel que si u et $\widehat{u}$ sont supportées par le Cantor $\mathcal{C}_n$, où $u \in \mathbb{C}^{p^n}$ dépend de n, alors $u = 0$.*

Démonstration. — L'élément u qui maximise la norme de $\|U_n u\|$ est supporté sur $\mathcal{C}_n$ et sa transformée de Fourier est aussi portée par $\mathcal{C}_n$. Montrons que $u = 0$ pour n assez grand. Par décomposition de Fourier : $u(x) = \sum_{k\in\mathcal{C}_n} u_k \left(e^{i\frac{x}{p^n}}\right)^k$ est un polynôme trigonométrique qui a au moins $p^n - \ell^n$ racines puisqu'il s'annule sur le complémentaire de $\mathcal{C}_n$ et ses modes de Fourier sont indicés par le Cantor dans le dual. Le degré du polynôme trigonométrique est au plus $(1-\frac{1}{p-1})(p^n-1) \leqslant p^n - p^{n-1}$. Quand $n \to +\infty$, on compare le meilleur degré asymptotique du polynôme et le nombre minimal de racines :

$$(p-1)p^{n-1} - (p^n - \ell^n) = -p^{n-1} + \ell^n = \ell^{n-1}(\ell - \left(\frac{p}{\ell}\right)^{n-1}) \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$$

comme $\frac{p}{\ell} > 1$. Asymptotiquement, il y a beaucoup trop de racines comparé au degré du polynôme donc $u = 0$. □

Lemme 2.10. — *On a l'inégalité stricte* $\|U_n\|_{L^2\to L^2} < \|U_n\|_{HS}$.

Démonstration. — Si la norme d'opérateur coincidait avec la norme de Hilbert–Schmidt, on aurait $\sup_{\lambda\in\sigma(U_n^*U_n)} \sqrt{\lambda} = \left(\sum_{\lambda\in\sigma(U_n^*U_n)} \lambda\right)^{\frac{1}{2}}$ car $\|U_n\|_{HS} = Tr\,(U_n^*U_n)^{\frac{1}{2}}$ et $\|U_n\|_{L^2\to L^2} = \sup_{\|v\|_{L^2}=1} \sqrt{\langle v, U_n^*U_n v\rangle}$. Cela voudrait dire que toutes les valeurs propres de $U_n^*U_n$ s'annulent sauf une valeur propre, donc $U_n^*U_n$ (et a fortiori U_n) serait de rang 1, ce qui n'est pas possible dès que l'alphabet $\mathcal{A}$ contient au moins 2 lettres car on peut toujours extraire un bloc 2×2 inversible dans U_n. □

Ce qui conclut la preuve du principe d'incertitude fractal sur les Cantors discrets qui a permis à Dyatlov et Jin (2017) d'obtenir des nouveaux résultats sur le trou spectral de l'application du boulanger quantique.

3. LE PRINCIPE D'INCERTITUDE FRACTAL SUR $\mathbb{R}$.

Dans cette partie, nous faisons un survol de la preuve du principe d'incertitude fractal sur $\mathbb{R}$ qui représente le contenu mathématique principal de l'article de Bourgain et Dyatlov (2018), les applications spectaculaires au trou spectral de la fonction zêta de Selberg résultent de la combinaison du principe d'incertitude fractal sur $\mathbb{R}$ avec les techniques microlocales de Dyatlov et Zahl (2016).

3.1. Énoncé du principe d'incertitude fractal sur $\mathbb{R}$.

Rappelons l'énoncé du principe d'incertitude fractal sur $\mathbb{R}$ où la notion de porosité est définie dans la définition 1.5. On veut montrer que

Théorème 3.1. — *Soit $\nu > 0$, il existe $C, \beta > 0$ tels que pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $X, Y \subset [0,1]$ qui sont ν-poreux sur une échelle $[\hbar, 1]$:*

$$supp\left(\widehat{f}\right) \subset \hbar^{-1}Y \implies \|f\|_{L^2(X)} \leqslant C\hbar^{\beta}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{21}$$

Remarque 3.2. — Tout d'abord, une remarque sur la remise à l'échelle et la transformée de Fourier semiclassique. L'ensemble Y a des trous sur une échelle $[\hbar, 1]$, donc il est naturel que l'ensemble $\hbar^{-1}Y$ ait des trous sur une échelle $[1, \hbar^{-1}]$. En notant $\mathcal{F}_\hbar$ la transformée de Fourier semiclassique définie par $\mathcal{F}_\hbar(f) = \frac{1}{\hbar^{\frac{1}{2}}}\widehat{f}(\frac{\xi}{\hbar})$, on observe que $\widehat{f}$ est supportée sur $\hbar^{-1}Y$ implique que $\mathcal{F}_\hbar(f)$ est supportée sur Y.

La preuve repose sur trois principes et peut se lire en trois étapes :

1. Un principe de prolongement unique dans la classe quasi-analytique. Dans le paragraphe 3.2, on prouve un principe de prolongement unique sur des ensembles γ-épais pour des fonctions dont la transformée de Fourier décroît très vite suivant Bourgain et Dyatlov (2018) et Jaye et Mitkovski (2018).
2. Un principe de prolongement unique des fonctions dont le spectre est parcimonieux par transférence. On transfère la condition de décroissance rapide de la transformée de Fourier en une condition de parcimonie sur le support de la transformée de Fourier. On utilise des décompositions par blocs et des convolutions avec des fonctions tests bien optimisées construites à l'aide du théorème de Beurling et Malliavin (1962).
3. Une itération sur les échelles. Partant d'une inégalité de prolongement unique sur un ensemble γ-épais d'une fonction f dont la transformée de Fourier est supportée sur un ensemble parcimonieux, on applique une procédure de récurrence sur les échelles pour en déduire le principe d'incertitude fractal.

3.2. Principe de prolongement unique pour des fonctions quasianalytiques.

Dans cette partie, nous allons prouver un principe de prolongement unique pour des fonctions dont la transformée de Fourier est à décroissance rapide de telle sorte que ces fonctions sont quasianalytiques. On peut faire une analogie avec le paragraphe 1.2 de l'introduction qui traite de l'espace de Paley–Wiener.

Nous allons prouver le principe de prolongement unique de type Logvinenko–Sereda suivant l'exposition de Jaye et Mitkovski (2018) (voir Muscalu et Schlag (2013, 10.3, p. 274) pour la version classique de ce principe) pour des fonctions dont la transformée de Fourier décroît très rapidement.

Définition 3.3 (Fonctions de la classe $C^{\mathcal{M}}$). — *Soit $\mathcal{M} = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite* log-*convexe, ce qui veut dire que $M_n^2 \leqslant M_{n+1}M_{n-1}$, $\forall n \geqslant 1$.*

Une fonction $f \in C^\infty([0,1])$ appartient à l'espace $C^{\mathcal{M}}([0,1])$ si il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que $\|f^{(n)}\|_{L^\infty[0,1]} \leqslant CM_n$.

Nous rappelons l'énoncé du théorème de Denjoy–Carleman qui donne une condition nécessaire et suffisante sur la suite $\mathcal{M}$ pour que $C^{\mathcal{M}}$ soit une classe de fonctions quasianalytiques, ce qui veut dire que si $f \in C^{\mathcal{M}}([0,1])$ s'annule à l'ordre ∞ en x_0 i.e. $f^{(n)}(x_0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $f = 0$.

THÉORÈME 3.4 (Denjoy–Carleman). — *Soit $\mathcal{M} = (M_n)_n$ une suite* log-*convexe. On pose $\mu_n = \frac{M_n}{M_{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a l'équivalence $\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n = +\infty \Leftrightarrow C^{\mathcal{M}}([0,1])$ est quasianalytique.*

Pour la preuve de ce théorème, on renvoie le lecteur à l'article très court de COHEN (1968) ou à HÖRMANDER (2007, p. 19-24).

Le premier résultat de prolongement unique que nous allons prouver va utiliser une propriété de compacité des fonctions quasianalytiques dans $C^{\mathcal{M}}([0,1])$. Dans la suite, étant donné un borélien E, nous noterons $|E|$ sa mesure de Lebesgue.

LEMME 3.5 (Prolongement unique élémentaire pour les fonctions quasianalytiques)
Soient $C^{\mathcal{M}}([0,1])$ une classe quasianalytique et $t, \gamma > 0$. Il existe $C > 0$ telle que pour toute $f \in C^{\mathcal{M}}([0,1])$, $\|f\|_{L^\infty([0,1])} \geqslant t$ et $E \subset [0,1]$ tel que $|E| \geqslant \gamma$, alors

$$\|f\|_{L^\infty([0,1])} \leqslant C\|f\|_{L^\infty(E)}. \tag{22}$$

Remarque 3.6. — Une remarque cruciale pour la suite est que la constante C ne dépend que du $\gamma > 0$ qui minore la mesure de E et non de E lui-même.

Démonstration. — Supposons par l'absurde que le résultat n'est pas vrai. Il existe $t, \gamma > 0$ et une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans $C^{\mathcal{M}}([0,1])$ telle que $\|f_n\|_{L^\infty(E_n)} \leqslant \frac{1}{n}\|f_n\|_{L^\infty([0,1])} \leqslant \frac{1}{n}$ et $\|f_n\|_{L^\infty([0,1])} \geqslant t$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pour tout k, $\|f_n^{(k)}\|_{L^\infty([0,1])} \leqslant CM_k$ pour tout n, donc la suite f_n est bornée dans tous les espaces $C^k([0,1])$. La suite est bornée dans C^1 donc elle est équicontinue. En particulier par Ascoli, on extrait une première fois pour avoir une suite $(f_{\varphi_1(n)})_n$ qui converge uniformément dans $C^0([0,1])$ vers f. Par récurrence, la suite $(f_{\varphi_k(n)})_n$ est bornée dans C^{k+1}, on réextrait pour avoir une suite $(f_{\varphi_{k+1}(n)})_n$ convergente dans C^k. Par extraction diagonale, la suite $(f_{\varphi_{n+1}(n)})_n$ va converger uniformément dans tous les $C^k([0,1])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Quitte à réextraire encore, on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - f_m\|_{C^0[0,1]} \leqslant \frac{1}{n}, \forall m \geqslant n$ et que la limite $f \in C^{\mathcal{M}}([0,1])$ satisfait $\|f\|_{L^\infty([0,1])} \geqslant t > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|E_n| \geqslant \gamma$ donc le borélien $E = \limsup_{n\to+\infty} E_n = \cap_{n=0}^{\infty} (\cup_{k\geqslant n} E_k)$ est bien mesurable avec $|E| \geqslant \gamma > 0$.

Comme $\sup_{x\in E_n} |f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}$, donc $\forall m \geqslant n$, $\sup_{x\in E_n} |f_m(x)| \leqslant \sup_{x\in E_n} |f_n(x)| + \|f_n - f_m\|_{C^0} \leqslant \frac{2}{n}$. On laisse $m \to +\infty$ et on en déduit que $\sup_{x\in E_n} |f(x)| \leqslant \frac{2}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ et donc $f = 0$ sur $E = \cap_n (\cup_{k\geqslant n} E_k)$ où $|E| \geqslant \gamma > 0$. On choisit un point $x \in E$ tel que $|[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] \cap E| > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Si aucun de ces points $x \in E$ n'existait, alors E serait de mesure nulle ce qui contredirait $|E| \geqslant \gamma > 0$. En effet, comme la suite $|[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] \cap E|$ est décroissante, si à un moment $|[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] \cap E| = 0$ alors x aurait un voisinage dans E de mesure nulle. Donc f s'annule en x, puis on prend une suite y_n dans $E \setminus \{x\}$ qui tend vers x, on a $\frac{f(y_n)-f(x)}{y_n - x} = 0, \forall n$ et donc à la limite $f'(x) = 0$. Puis par récurrence, en utilisant le fait que $f \in C^\infty$, f s'annule à l'ordre infini en $x \in E$, d'où l'on conclut que $f = 0$ par quasianalyticité de f, contradiction ! □

On a besoin de convertir la borne inférieure L^∞ du lemme ci-dessus en une inégalité de prolongement unique dans L^2.

LEMME 3.7. — *Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme précédent, il existe $C > 0$ telle que pour tout $f \in C^{\mathcal{M}}([0,1])$, $\|f\|_{L^\infty([0,1])} \geqslant t$ et $E \subset [0,1]$ telle que $|E| \geqslant \gamma$, alors*

$$\|f\|_{L^2([0,1])} \leqslant C\|f\|_{L^2(E)}. \tag{23}$$

Démonstration. — L'idée est d'adapter le mécanisme de l'inégalité de Markov en probabilités. Si X est une variable aléatoire à densité a.c. par rapport à Lebesgue, $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$ donc $\mathbb{P}(X \leqslant a) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$. Pour que l'inégalité dans l'autre sens soit intéressante, il faut prendre a telle que $\mathbb{E}(X) < a$. Dans notre cas on pose $\tilde{E} = \{x \in E; |f^2(x)| \leqslant a\}$ et on trouve par le raisonnement précédent que $\frac{|\tilde{E}|}{|E|} \geqslant 1 - \frac{\|f\|^2_{L^2(E)}}{a}$. Donc si on choisit $a = 2\|f\|^2_{L^2(E)}$, on en déduit $|\tilde{E}| \geqslant \frac{1}{2}|E| \geqslant \frac{\gamma}{2}$. Donc on applique l'inégalité du lemme 3.5 à l'ensemble $\tilde{E}$,

$$\|f\|_{L^2([0,1])} \leqslant \|f\|_{L^\infty([0,1])} \leqslant \tilde{C}\|f\|_{L^\infty(\tilde{E})} \leqslant \tilde{C}\sqrt{2}\|f\|_{L^2(E)}$$

où on utilise le fait que la constante $\tilde{C}$ ne dépend pas de f et $\tilde{E}$ mais juste du fait que la mesure de $\tilde{E}$ est $\geqslant \frac{\gamma}{2}$ et le fait que sur $\tilde{E}$ on a $|f| \leqslant \sqrt{a}$ par définition. □

Soit $\gamma > 0$, un borélien $E \subset \mathbb{R}$ sera dit γ-épais si $|E \cap B| \geqslant \gamma$ pour tout intervalle B de longueur 1. On peut maintenant prouver le théorème de Logvinenko–Sereda pour des fonctions à transformée de Fourier à décroissance rapide qui est un résultat de JAYE et MITKOVSKI (2018). La décroissance est contrôlée par un poids confinant le support de la transformée de Fourier.

THÉORÈME 3.8 (Théorème de Logvinenko–Sereda en quasianalytique)
Soit $W : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ une fonction poids qui vérifie les conditions suivantes :

1. *$W(0) = 1$, W est croissante, semicontinue inférieurement*[14] *et $\lim_{t\to+\infty} W(t) = +\infty$,*
2. *$\log(r) \mapsto \log(W(r))$ est convexe,*
3. *$\int_0^\infty \frac{\log(W(t))}{1+t^2} dt = \infty$.*

Soit $\gamma > 0$, pour toute $C_W > 0$, il existe $C > 0$ telle que si

$$\|W\widehat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C_W\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

alors pour tout borélien E γ-épais, on a l'inégalité de prolongement unique :

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C\|f\|_{L^2(E)}. \tag{24}$$

Il est important de retenir que la constante C ne dépend que de l'épaisseur γ et de C_W et non de l'ensemble E. Des exemples de poids satisfaisant aux hypothèses du théorème 3.8 sont les indicatrices d'intervalles bornés (auquel cas on travaille dans la classe de Paley–Wiener) et les exponentielles $W(\xi) = e^{1+|\xi|}$.

14. le lecteur pourra sans pertes de généralités prendre des poids continus ou bien qui valent 1 sur un intervalle et $+\infty$ en dehors qui vont localiser le support de Fourier dans un intervalle.

Démonstration. — On suppose que $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$.
Étape 1, on prouve une estimée de Bernstein à poids et une version quasi-analytique du théorème de Paley–Wiener. Montrons que l'ensemble des fonctions f telles que $\|W\widehat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C_W \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$ sont bornées dans une classe quasianalytique. La preuve est une simple version *à poids* des estimées de Bernstein.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \|f^{(n)}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|(i\xi)^n \widehat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leqslant \left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{|\xi|^n}{W(\xi)}\right)^2 \|W\widehat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= M_n^2 \|W\widehat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = M_n^2 C_W^2 \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

où $M_n = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{|\xi|^n}{W(\xi)}$. Donc $\|f^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant M_n \|W\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C_W M_n \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ pour tout n, mais cela ne suffit pas pour conclure que f est quasianalytique car on aurait besoin d'une borne L^∞ au lieu d'une borne L^2. On aimerait convertir cette estimée qui contrôle la norme L^2 de la dérivée n-ième en une estimée contrôlant la norme L^∞ de la dérivée n-ième. Par continuité de l'injection de Sobolev $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^0(\mathbb{R})$, on a une estimée de la forme :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \|f^{(n)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leqslant C_{Sob} \left(\|f^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|f^{(n+1)}\|_{L^2(\mathbb{R})}\right) \\ &\leqslant C_{Sob}(M_n + M_{n+1}) \|W\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant 2C_{Sob} M_{n+1} \|W\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant 2C_{Sob} M_{n+1} C_W\end{aligned}$$

car $(M_n)_n$ est croissante et où la constante C_{Sob} ne dépend pas de $n \in \mathbb{N}$ mais seulement de l'injection de Sobolev. On en déduit que $\|W\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} < +\infty$ implique que f est quasianalytique à la manière du théorème de Paley–Wiener.

Étape 2 : On va décomposer $\mathbb{R}$ en bons et mauvais intervalles. L'inégalité de type Bernstein nous dit que

$$\|f^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant M_n \|W\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant M_n C_W \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \tag{25}$$

pour tout n. On partitionne $\mathbb{R}$ en une union d'intervalle de largeur 1. Puis on cherche à localiser l'inégalité de Bernstein (25) sur des intervalles I de taille 1 en une estimée de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f^{(n)}\|^2_{L^2(I)} \leqslant C_W M_n R^{2(n+1)} \|f\|^2_{L^2(I)} \tag{26}$$

où R est un paramètre indépendant de $n \in \mathbb{N}$ que l'on va ajuster à la fin de la preuve .

On va départager les intervalles de $\mathbb{R}$ en deux familles : les bons intervalles où l'estimée ci-dessus est vérifiée et les mauvais intervalles où l'inégalité est fausse. Soit $\mathcal{B}_n$ l'union des mauvais intervalles I où l'inégalité (26) est vérifiée pour tout $k < n$ mais $\|f^{(n)}\|^2_{L^2(I)} > C_W M_n R^{2(n+1)} \|f\|^2_{L^2(I)}$. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{I\in\mathcal{B}_n} \|f\|^2_{L^2(I)} < \frac{1}{C_W M_n R^{2(n+1)}} \sum_{I\in\mathcal{B}_n} \|f^{(n)}\|^2_{L^2(I)} \leqslant \\ \frac{1}{C_W M_n R^{2(n+1)}} \|f^{(n)}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \frac{1}{R^{2(n+1)}} \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{B} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_n$ l'union des mauvais intervalles. En sommant l'inégalité précédente sur n, on obtient :

$$\int_{\mathcal{B}} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{I\in\mathcal{B}_n} \|f\|^2_{L^2(I)} \leqslant \frac{1}{R^2}\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{R^{2n}}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

En choisissant R assez grand, on peut faire en sorte que $\int_{\mathcal{B}} |f(x)|^2 dx \leqslant \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$.

Étape 3 : On va utiliser la quasianalyticité sur les bons intervalles pour appliquer le prolongement unique. Soit I un bon intervalle, de nouveau par les injections de Sobolev, on obtient :

$$\|f^{(n)}\|_{L^\infty(I)} \leqslant C_{Sob}\left(\|f^{(n)}\|_{L^2(I)} + \|f^{(n+1)}\|_{L^2(I)}\right) \leqslant 2C_{Sob}M_{n+1}C_W R^{2(n+2)}\|f\|^2_{L^2(I)}$$

où on suppose que $R > 1$ est fixée par l'étape 2. On note que l'indice n est décalé en $n+1$ car on contrôle $\|f^{(n)}\|_{L^\infty(I)}$ en terme de sa dérivée. On pose la nouvelle fonction $\tilde{f} = \frac{f}{2C_{Sob}R^4C_W M_1\|f\|^2_{L^2(I)}}$, alors

$$\|\tilde{f}^{(n)}\|_{L^\infty(I)} \leqslant \frac{M_{n+1}}{M_1}R^{2n}$$

et on remarque que la nouvelle suite de terme général $\tilde{M}_n = \frac{M_{n+1}}{M_1}R^{2n}$ est également log-convexe et vérifie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{M}_n}{\tilde{M}_{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M_{n+1}}{M_{n+2}}R^{-2} = +\infty$ donc par le théorème de Denjoy–Carleman, la fonction $\tilde{f}$ est quasianalytique dans $C^{\tilde{M}}$ et $\|\tilde{f}\|_{L^2(I)} = \frac{1}{2C_{Sob}R^4C_W M_1} > 0$. Comme I est un intervalle de largeur 1, nécessairement on a $\|\tilde{f}\|_{L^\infty(I)} \geqslant \frac{1}{2C_{Sob}R^4C_W M_1} > 0$. Par le lemme de prolongement unique dans la classe quasianalytique appliquée à $\tilde{f} \in C^{\tilde{M}}$ et où $t = \frac{1}{2C_{Sob}R^4C_W M_1}$, il existe $C > 0$ (qui ne dépend pas du choix du bon intervalle I ni de E mais juste de (γ, t)) tel qu'on ait :

$$\|\tilde{f}\|_{L^\infty(I)} \leqslant C\|\tilde{f}\|_{L^\infty(I\cap E)}.$$

En renormalisant la fonction $\tilde{f}$, cela nous donne $\|f\|_{L^\infty(I)} \leqslant C\|f\|_{L^\infty(I\cap E)}$ sur tous les bons intervalles.

Étape 4 : reconversion d'une borne inf sur L^∞ en borne inf sur la norme L^2. On doit comprendre que la borne L^∞ que l'on vient de prouver sur tous les bons intervalles, on peut la convertir par le lemme 3.7 en une estimée de la forme $\|f\|_{L^2(I)} \leqslant \tilde{C}\|f\|_{L^2(I\cap E)}$ sur tous les bons intervalles.

Conclusion : on a

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \|f\|^2_{L^2(\mathcal{B})} = \sum_{I\in\mathcal{G}}\|f\|^2_{L^2(I)} \leqslant \tilde{C}^2\sum_{I\in\mathcal{G}}\|f\|^2_{L^2(I\cap E)} \leqslant \tilde{C}^2\|f\|^2_{L^2(E)}$$

et comme la norme L^2 de la restriction aux mauvais intervalles est petite $\|f\|^2_{L^2(\mathcal{B})} \leqslant \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$, on conclut que $\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant 2\tilde{C}^2\|f\|^2_{L^2(E)}$ ce qui termine la preuve. □

3.2.1. *De la notion de γ-épaisseur à la notion de porosité.* — L'objectif principal du lemme suivant est de relier épaisseur, notion utile dans les problèmes de prolongement unique et porosité qui nous vient du monde des fractales.

Lemme 3.9. — *Soit X un ensemble ν-poreux sur une échelle $[0,1]$. Alors pour $X_\hbar = X + [-\hbar, \hbar]$, l'ensemble $E = \mathbb{R} \setminus X_\hbar$ est ν-épais. En fait pour tout intervalle I de longueur dans $[\hbar, 1]$,*

$$|E \cap I| \geqslant \nu |I|. \tag{27}$$

Démonstration. — On observe par définition de la porosité et de l'épaisseur que le complémentaire $E = \mathbb{R} \backslash X_\hbar$ est ν-épais puisque pour tout intervalle I de largeur 1, $|I \cap E| \geqslant \nu$. □

Dans l'argument d'itération, on se donne un ensemble X qui est ν-poreux sur une échelle $[0,1]$. Donc son $\hbar$-voisinage $X_\hbar = X + [-\hbar, \hbar]$ est ν-poreux sur une échelle $[\hbar, 1]$, c'est juste un épaississement.

3.3. Le principe de transférence et les fonctions à spectre parcimonieux.

Dans cette partie, on va décrire le principe de transférence qui nous permet de passer du prolongement unique pour des fonctions à transformée de Fourier à décroissance très rapide au prolongement unique pour des fonctions à support de Fourier dans des ensembles parcimonieux (intuitivement avec "beaucoup de trous"). C'est dans cette étape que l'on va utiliser le théorème de Beurling–Malliavin.

3.4. Introduction.

On part d'un ensemble Y qui est ν-poreux sur une échelle $[\hbar, 1]$. L'ensemble dilaté $\hbar^{-1}Y$ est ν-poreux sur une échelle $[1, \hbar^{-1}]$ donc les trous et intervalles qui recouvrent $\hbar^{-1}Y$ sont à l'échelle macroscopique. Par la définition de la porosité, l'ensemble $\hbar^{-1}Y$ peut être recouvert par une union d'intervalles de largeur $\leqslant 2(1-\nu)$ et espacés d'au moins ν. En fait, c'est l'ensemble parcimonieux $\hbar^{-1}Y + [-1,1]$ qui va supporter $\widehat{f}$ dans le théorème de prolongement unique 3.10.

3.5. Enoncé du théorème principal de la section.

Nous allons énoncer une variante de la proposition 3.3, p. 25 dans Bourgain et Dyatlov (2018) due à Jaye–Mitkovski. C'est un théorème de prolongement unique pour des fonctions dont la transformée de Fourier est supportée sur des ensembles parcimonieux.

Théorème 3.10. — *Pour tout $\sigma > 0$, $0 < \nu < 1$, il existe une constante C telle que pour tout ensemble $\hbar^{-1}Y$ ν-poreux sur une échelle $[1, \hbar^{-1}]$, pour tout ensemble E ν-épais, $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$,*

$$\mathit{supp}(\widehat{f}) \subset \hbar^{-1}Y + [-1,1] \implies \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C \|f\|_{L^2(E_\sigma)} \tag{28}$$

où $E_\sigma = E + [-\sigma, \sigma]$.

La constante C ne dépend que de ν, σ et ne dépend pas de l'ensemble E et de $\hbar$ qui peut être arbitrairement petit. Le σ quantifie une certaine perte dans l'estimée de prolongement unique et va contraindre le support de la fonction test venant du théorème de Beurling–Malliavin.

3.5.1. *Fonction test et multiplicateurs de Beurling–Malliavin.* — Notre but dans cette partie est de construire une bonne fonction test φ dont le support est compact et telle que sa transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ décroît vite quand elle est restreinte à l'ensemble $\hbar^{-1}Y$. C'est une des étapes cruciale de la preuve et fait appel au théorème de Beurling–Malliavin ou à ses variantes.

On va utiliser une version quantitative du théorème de Beurling–Malliavin due à Bourgain et Dyatlov (2018, lemme 2.11 p. 15).

Théorème 3.11 (Multiplicateur de Beurling–Malliavin effectif)
Soit $C_0, \sigma > 0$, alors il existe $c > 0$ tel que pour tout poids $W = e^{-\rho}, \rho \geqslant 0$ tel que $\int_0^\infty \frac{\rho(t)}{1+t^2} dt \leqslant C_0$ et $\|\rho'\|_\infty \leqslant C_0$ alors il existe $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ telle que

1. *$supp(\varphi) \subset [-\sigma, \sigma]$,*
2. *$\|\widehat{\varphi}\|_{L^2[-1,1]} \geqslant c$,*
3. *$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant e^{-c\rho}$ sur $\mathbb{R}$.*

Nous admettrons ce théorème comme une boîte noire dans la suite. Nous allons énoncer une Proposition (voir Bourgain et Dyatlov, 2018, Lemma 3.1 p. 20) qui prouve l'existence d'une fonction à support compact et dont la transformée de Fourier décroît très vite au voisinage de l' ensemble parcimonieux $\hbar^{-1}Y$, plus vite que sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.12 (Fonction test pour la transférence). — *Soit Y un ensemble ν-poreux sur une échelle $[1, \hbar^{-1}]$ et $\sigma > 0$. Il existe des constantes $c_1, \delta > 0$, qui ne dépendent que de ν, σ et une fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ telle que pour*

$$\theta(\xi) = \log(10 + |\xi|)^{-\delta},$$

on ait

1. *$supp(\varphi) \subset [-\sigma, \sigma]$,*
2. *$\|\widehat{\varphi}\|_{L^2(-1,1)} \geqslant c_1$,*
3. *$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant e^{-c_1|\xi|\theta(\xi)}$ pour tout $\xi \in \hbar^{-1}Y + [-3, 3]$,*
4. *$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant e^{-c_1\langle\xi\rangle^{\frac{1}{2}}}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.*

Dans la suite, étant données deux fonctions ou suites (A, B), nous écrirons $A \lesssim B$ quand $A \leqslant CB$ pour une certaine constante C indépendantes des variables dont dépendent A et B.

Démonstration. — Cette proposition est clef. La preuve est combinatoire une fois qu'on admet le théorème de Beurling–Malliavin. Sans perte de généralité, on peut chercher à prouver le théorème pour $\hbar^{-1}Y$ au lieu de $\hbar^{-1}Y + [-3, +3]$. et pour $\hbar = 2^{-K}$. Il suffit de trouver un $\delta > 0$ et de construire un poids ρ satisfaisant $\rho(\xi) \geqslant |\xi|\theta(\xi) = |\xi| \log(10+|\xi|)^{-\delta}$ pour $\xi \in \hbar^{-1}Y = 2^K Y$ et de telle sorte que $\int_{\mathbb{R}} \frac{\rho(\xi)}{1+\xi^2} d\xi \leqslant C_0 < \infty$ où C_0 ne dépend pas de $\hbar^{-1}Y$ mais juste des constantes ν, σ. Le paramètre $\delta > 0$, donc $\theta = \log(10 + |\xi|)^{-\delta}$, sera déterminé à la fin de la preuve, il va dépendre de ν. Un tel poids ρ satisfait les hypothèses du théorème 3.11 qui nous garantit l'existence d'une fonction test φ avec les propriétés voulues. Le point crucial, c'est la parcimonie de $2^K Y$: le fait qu'il y a pleins de trous à toutes les échelles de 1 à 2^K. Posons $\tilde{Y} = 2^K Y$ puis découpons $\tilde{Y}$ en anneaux concentriques en posant

$$\tilde{Y} = \cup_{k=0}^{K} \left(\tilde{Y} \cap J_k\right), J_k = [-2^k, -2^{k-1}] \cup [2^{k-1}, 2^k], J_0 = [-1, 1],$$

les J_k forment une partition concentrique de $[-2^K, 2^K]$ qui contient $\tilde{Y}$. Chaque J_k est de taille 2^k et on s'attend à ce que $\tilde{Y} \cap J_k$ soit de taille $\sim 2^k(1-\nu)^k < 2^k$ par porosité sur chaque échelle de 1 à 2^k.

Considérons un recouvrement de chaque $J_k \cap \tilde{Y}$ par des intervalles de taille $2^{k-1}\theta(2^k) \sim 2^{k-1}k^{-\delta}$, ils sont un peu plus courts que les intervalles dyadiques et le paramètre $\delta > 0$ sera ajusté à la fin de la preuve.

$$\tilde{Y} \cap J_k = \bigcup_{\ell=1}^{N_k} J_{k\ell}, |J_{k\ell}| = 2^{k-1}\theta(2^k).$$

On rappelle l'ordre de grandeur qu'on doit garder en tête $\theta(\xi) \sim \log(|\xi|)^{-\delta}$ pour ξ grand. Utilisons la ν-porosité de $\tilde{Y} \cap J_k$ pour montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $N_k \leqslant C\theta(2^k)^{-1+\varepsilon}$. Intuitivement, il faut à peu près $\theta(2^k)^{-1} \sim k^\delta$ intervalles de largeur $2^{k-1}\theta(2^k)$ pour recouvrir J_k, mais pour recouvrir seulement $\tilde{Y} \cap J_k$, on voit à l'avance que la porosité de $\tilde{Y} \cap J_k$ sur l'échelle $[2^k\theta(2^k), 2^k]$ va limiter le nombre d'intervalles.

On pose $m > 2, m \in \mathbb{N}$ et on recouvre $[2^{k-1}, 2^k]$ par des intervalles de largeur $m^{-1}2^{k-1}$. Par porosité, il y en a un qui ne rencontre pas $\tilde{Y}$. Ensuite on prend chaque intervalle qui reste, on le recouvre par m intervalles de largeur $m^{-2}2^{k-1}$, il y en a encore au moins 1 qui ne touche pas $\tilde{Y}$ par porosité. On poursuit l'algorithme jusqu'à ce que $m^{-j} \sim \theta(2^k)$ et on aura gardé en tout $(m-1)^j$ intervalles de taille $m^{-j}2^{k-1} \simeq 2^{k-1}\theta(2^k)$ au lieu des $m^j \sim \theta(2^k)^{-1} \sim k^\delta$ initialement prévus, donc $\varepsilon = 1 - \frac{\log(m-1)}{\log(m)}$.

Considérons la bosse $\rho_{kl} \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geqslant 0})$ qui vaut $2^k\theta(2^k)$ sur J_{kl}, $\rho_{kl} = 0$ en dehors d'un $2^k\theta(2^k)$ voisinage de J_{kl} et $\sup |\rho'_{kl}| \leqslant 100$. Posons

$$\rho = 10 \sum_{k=0}^{K} \sum_{\ell=1}^{N_k} \rho_{kl},$$

il est évident que $\rho(\xi) \geqslant \xi\theta(\xi)$ sur $\tilde{Y}$ pour ξ assez grand et quitte à modifier ρ sur un compact, on peut rendre l'inégalité vraie partout. Maintenant, qu'on a construit le poids, la seule chose à vérifier c'est que l'intégrale de Poisson soit finie pour appliquer Beurling–Malliavin. C'est une majoration simple :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\rho}{1+\xi^2} d\xi \lesssim \sum_{k=0}^{K} \sum_{\ell=1}^{N_k} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{\rho_{kl}}{1+\xi^2}}_{\lesssim 2^{-k}\theta(2^k)} d\xi \lesssim \sum_{k=0}^{K} \sum_{\ell=1}^{N_k} \underbrace{2^k\theta(2^k)}_{\sim|\mathrm{support}(\rho_{kl})|} \; 2^{-k}\theta(2^k)$$

$$\lesssim \sum_{k=0}^{K} \theta(2^k)^{-1+\varepsilon}\theta(2^k)^2 \lesssim \sum_{k=0}^{K} k^{-\delta(1+\varepsilon)}$$

où la majoration est uniforme en K si le paramètre δ vérifie $\delta > (1+\varepsilon)^{-1}$. Le paramètre ν détermine ε qui à son tour détermine δ donc le δ qui apparaît dans $\theta(\xi) = \log(10+|\xi|)^{-\delta}$ est déterminé par la porosité de telle sorte que l'intégrale de Poisson converge. Quitte à rajouter $\langle\xi\rangle^{\frac{1}{2}}$, le poids ρ vérifie les hypothèses du théorème 3.11, il existe φ qui satisfait les propriétés de l'énoncé de la Proposition. $\square$

Dans la suite, il faudra ajuster l'exposant $\delta \in ((1+\varepsilon)^{-1}, 1)$ de telle façon à ce que pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\widehat{f}$ supportée dans $\hbar^{-1}Y$, on ait $\mathcal{F}^{-1}\left(W\widehat{f}\right)$ quasianalytique.

3.6. Preuve du théorème 3.10

3.6.1. *Intuition des difficultés de la preuve.* — Une idée récurrente en analyse harmonique est l'idée de découplage où on décompose une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ en une somme de blocs $\Pi_k(f)$ supportés en Fourier sur des couronnes $2^k \leqslant |\xi| \leqslant 2^{k+1}$ et les $\Pi_k(f)$ sont orthogonaux, ce qui s'écrit :

$$\|f\|_{L^2}^2 \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \|\Pi_k(f)\|_{L^2}^2.$$

C'est l'idée de base de la décomposition de Littlewood–Paley–Stein en analyse harmonique (voir Meyer, 1998, p. 14–15). Revenons à notre situation. On peut recouvrir $\hbar^{-1}Y + [-1,1]$ par une union d'intervalles $\cup_k I_k$ d'intervalles où chaque I_k est centré en t_k et il y a peu de chevauchements. Comme $\widehat{f}$ est portée par une union d'intervalles $\cup_k I_k$, on a bien entendu

$$\|f\|_{L^2}^2 \lesssim \sum_k \|\widehat{f}\|_{L^2(I_k)}^2 \tag{29}$$

par Plancherel. Ensuite, on va vouloir appliquer le principe de prolongement unique à chaque bloc $f_k = \mathcal{F}^{-1}(f1_{I_k})\, e^{it_k}$ qui est supporté en Fourier sur un intervalle où le facteur exponentiel est présent pour recentrer le support de la transformée de Fourier. Donc a priori, on aurait une inégalité de la forme

$$\|f_k e^{it_k\cdot}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leqslant C\|f_k e^{it_k\cdot}\|_{L^2(E)}^2$$

par l'inégalité de prolongement unique classique de Logvinenko–Sereda pour les fonctions à spectre borné et la constante C ne dépend pas de k mais seulement de la γ-épaisseur de E. Pour conclure, il faudrait montrer que $\sum_k \|f_k e^{it_k\cdot}\|_{L^2(E)}^2 \lesssim \|\sum_k f_k e^{it_k\cdot}\|_{L^2(E)}^2 = \|f\|_{L^2(E)}^2$ et c'est là qu'il semble y avoir une grosse difficulté. La transformée de Fourier de l'indicatrice d'un intervalle de largeur 2 est un sinus cardinal déphasé $2e^{it_k}\frac{\sin(\xi)}{\xi}$ mais il n'est pas bien localisé en zéro et ne décroît pas assez vite pour qu'on puisse prouver l'estimée ci-dessus.

3.6.2. *La preuve avec la bonne fonction test à la place des indicatrices.* — Donc au lieu de localiser avec des indicatrices 1_I, on va plutôt employer la fonction test du théorème de Beurling–Malliavin car elle a l'avantage d'être localisée en position et a une bonne décroissance en Fourier sur l'ensemble parcimonieux $\hbar^{-1}Y + [-1,1]$. Mais au lieu d'avoir une minoration du type $\widehat{\varphi} \geqslant c > 0$ sur l'intervalle I (qu'on aurait si $\widehat{\varphi}$ était une indicatrice ou une Gaussienne), on a plutôt une hypothèse du type $\|\widehat{\varphi}\|^2_{L^2(I)} > 0$ qui est moyennée. Donc la décomposition en bloc doit être légèrement modifiée et on prouve un analogue de l'identité (29) :

Lemme 3.13. — *On suppose que supp* $\left(\widehat{f}\right) \subset \cup_k I_k$ *où* $I_k = [t_k - 1, t_k + 1]$. *Soit une suite* $\varphi_k \in L^2(\mathbb{R})$ *avec* $\|\widehat{\varphi_k}\|^2_{L^2[-1,1]} \geqslant c_1 > 0$. *Alors :*

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \frac{1}{c_1}\int_{-2}^{2}\sum_k \|\widehat{f}(. + \tau + t_k)\widehat{\varphi_k}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}d\tau. \tag{30}$$

Démonstration. — On part de (29)

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\|\widehat{f}\|^2_{L^2(I_k)}$$

et on va chercher à majorer chaque terme $\|\widehat{f}\|^2_{L^2(I_k)}$. Par Fubini, on trouve

$$\|\widehat{f}\|^2_{L^2(I_k)} = \int_{-1}^{1}|\widehat{f}(\xi + t_k)|^2 d\xi \leqslant \frac{1}{c_1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|\widehat{f}(\xi + t_k)|^2|\widehat{\varphi_k}(\tau)|^2 d\xi d\tau.$$

Observons que quel que soit $\tau \in [-1,1]$, on a

$$\int_{-1}^{1}|\widehat{f}(\xi + t_k)|^2 d\xi = \int_{-1-\tau}^{1-\tau}|\widehat{f}(\xi + t_k + \tau)|^2 d\xi \leqslant \int_{-2}^{2}|\widehat{f}(\xi + t_k + \tau)|^2 d\xi$$

donc en réinjectant dans le membre de droite de l'inégalité on trouve

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f}\|^2_{L^2(I_k)} \leqslant \frac{1}{c_1}\int_{-1}^{1}&\left(\int_{-2}^{2}|\widehat{f}(\xi + t_k + \tau)|^2|\widehat{\varphi_k}(\tau)|^2 d\xi\right)d\tau \\
&= \frac{1}{c_1}\int_{-2}^{2}\left(\int_{-1}^{1}|\widehat{f}(\xi + t_k + \tau)|^2|\widehat{\varphi_k}(\tau)|^2 d\tau\right)d\xi \\
&\leqslant \frac{1}{c_1}\int_{-2}^{2}\left(\int_{\mathbb{R}}|\widehat{f}(\xi + t_k + \tau)|^2|\widehat{\varphi_k}(\tau)|^2 d\tau\right)d\xi \\
&\leqslant \frac{1}{c_1}\int_{-2}^{2}\|\widehat{f}(\xi + t_k + .)\widehat{\varphi_k}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}d\xi.
\end{aligned}$$

Et on conclut en resommant. □

On se donne f telle que $\widehat{f}$ est portée par $\hbar^{-1}Y + [-1,1]$ que l'on recouvre par une union d'intervalles $\cup_\ell I_\ell$ de largeur 2 dont les centres sont suffisamment espacés. Ensuite pour chaque I_ℓ, le théorème de Beurling–Malliavin nous donne une fonction test $\widehat{\varphi_\ell}$ centrée autour de I_ℓ et à décroissance très rapide sur un voisinage de $\hbar^{-1}Y$. On utilise cette fonction pour décomposer f en **blocs quasianalytiques** et exploiter des propriétés de découplage. On va appliquer la Proposition 3.12 pour chaque indice ℓ, elle nous donne une fonction test φ_ℓ telle que :

— $\operatorname{supp}(\varphi_\ell) \subset [-\sigma,\sigma]$
— $|\widehat{\varphi_\ell}(\xi)| \leqslant e^{-c_1\langle\xi\rangle^{\frac{1}{2}}}$ sur $\mathbb{R}$
— $|\widehat{\varphi_\ell}(\xi)| \lesssim e^{-c_1\rho(\xi)}$ sur $\hbar^{-1}Y + [-3,3] - t_\ell$ [15] (translatée du 3-voisinage de $\hbar^{-1}Y$)
— $|\widehat{\varphi_\ell}|_{L^2[-1,1]} \geqslant c_1$

où les constantes c_1, σ ne dépendent pas de ℓ.

Pour chaque $\tau \in [-2,2]$, on considère

$$f_{\tau,\ell} = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}(.+\tau+t_\ell)\widehat{\varphi_\ell}) = (f.e_{-\tau-t_\ell}) \star \varphi_\ell$$

où le rôle de l'exponentielle $e_{-\tau-t_\ell} = e^{-i(\tau+t_\ell)x}$ est de décaler le support de $\widehat{f}\widehat{\varphi_\ell}$ de façon à centrer l'intervalle I_ℓ autour de 0. Pour le moment, l'inégalité 30 se réécrit en termes des $f_{\tau,\ell}$ comme

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \frac{1}{c_1}\int_{-2}^{2}\sum_\ell \|f_{\tau,\ell}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}d\tau. \tag{31}$$

Quel que soit $\tau \in [-2,2]$, la fonction $\widehat{f_{\tau,\ell}}$ est portée par $\hbar^{-1}Y + [-3,3] - t_\ell$ et satisfait l'estimée :

$$|\widehat{f_{\tau,\ell}}(.)| \lesssim |\widehat{f}(.+\tau+t_\ell)|\sqrt{|\widehat{\varphi_\ell}|}e^{-\frac{c_1\rho}{2}}$$

car la fonction test $\widehat{\varphi_\ell}$ restreinte à l'ensemble $\hbar^{-1}Y + [-3,3] - t_\ell$ décroît comme $e^{-c_1\rho}$. Pour chaque ℓ, on a donc l'estimée $|e^{\frac{c_1\rho}{2}}\widehat{f_{\tau,\ell}}| \lesssim \sum_\ell |\widehat{f}(.+\tau+t_\ell)|\sqrt{|\widehat{\varphi_\ell}|}$ d'où l'on déduit en sommant sur ℓ et en passant à la norme L^2 que :

$$\forall\tau \in [-2,2], \sum_\ell \|e^{\frac{c_1\rho}{2}}\widehat{f_{\tau,\ell}}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C\sum_\ell \|\widehat{f}(.+\tau+t_\ell)\sqrt{|\widehat{\varphi_\ell}|}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{32}$$

Remarquons immédiatement que :

$$\|e^{\frac{c_1\rho}{2}}\widehat{f_{\tau,\ell}}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} < +\infty \implies \|e^{\frac{|\xi|\log(10+|\xi|)^{-\delta}}{2}}\widehat{f_{\tau,\ell}}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} < +\infty \text{ avec } 0<\delta<1,$$

par les propriétés du poids ρ établies dans la Proposition 3.12. Comme le poids $e^{\frac{c_1\rho}{2}}$ restreint au support de $\widehat{f_{\tau,\ell}}$ est à forte croissance à l'infini et $\int_0^\infty \frac{|\xi|\log(10+|\xi|)^{-\delta}}{1+\xi^2} = +\infty$, cela veut dire que chaque bloc $f_{\tau,\ell}$ voit sa transformée de Fourier à décroissance suffisamment rapide pour être quasianalytique.

La constante C va changer de ligne en ligne pour simplifier les expressions. On utilise de nouveau le fait que $\widehat{\varphi_\ell}$ décroît encore très vite,

$$\int_{-2}^{2}\sum_\ell \|e^{\frac{c_1\rho}{2}}\widehat{f_{\tau,\ell}}\|^2_{L^2}d\tau \leqslant C\sum_\ell\int_{-2}^{2}\|\widehat{f}(.-\tau-t_\ell)\sqrt{|\widehat{\varphi_\ell}|}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}d\tau \leqslant C\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \tag{33}$$

où on a utilisé le

15. On doit prendre un 3-voisinage car l'opération de moyenne définissant les blocs épaissit les supports.

Lemme 3.14. — *Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$, $c>0$ et $(t_\ell)_\ell$ une suite espacée $|t_\ell - t_{\ell'}| \geqslant 1, \forall \ell \neq \ell'$ alors on a la majoration*

$$\sum_\ell \int_{-2}^{2} \|g(.+\tau+t_\ell)e^{-\frac{c}{2}\langle . \rangle^{\frac12}}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \tag{34}$$

où C ne dépend que de c.

Démonstration. — La preuve est simple :

$$\sum_\ell \int_{-2}^{2} \|g(.+\tau+t_\ell)e^{-c\langle . \rangle^{\frac12}}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \sum_\ell \int_{-2}^{2} \|g(.+\tau)e^{-c\langle . -\tau-t_\ell\rangle^{\frac12}}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

On observe que les t_ℓ étant régulièrement espacés, on a des estimées simples de la forme

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R},\tau\in[-2,2]} \sum_\ell e^{-c\langle \xi-\tau-t_\ell\rangle^{\frac12}} \lesssim \sup_{\xi,\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c\sqrt{1+|\xi-\tau-t|}}dt \lesssim 2\int_1^\infty e^{-c\sqrt{t}}dt \lesssim \frac{1}{c^2}.$$

Ce qui conclut. □

On a décomposé la fonction f en beaucoup de petits bouts $f_{\tau,\ell}$ et chaque bout est quasianalytique grâce à l'estimée $\|e^{\frac{|\xi|\log(10+|\xi|)^{-\delta}}{2}}\widehat{f_{\tau,\ell}}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \|e^{\frac{c_1\rho}{2}}\widehat{f_{\tau,\ell}}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} < +\infty$, $\delta<1$, qui découle de (33). Mais on aimerait localiser cette propriété de quasianalyticité exactement comme dans la preuve du théorème 3.8. Fixons un paramètre $D>1$ et appelons une paire (τ,ℓ) **bonne** si

$$\|e^{\frac{c_1\rho}{2}}\widehat{f_{\tau,\ell}}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant D\|f_{\tau,\ell}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Comme dans la preuve du prolongement unique, on observe que la somme $\sum_{\ell;(\tau,\ell)\in\text{mauvais}}$ sur les mauvaises paires est petite en norme L^2 :

$$\int_{-2}^{2}\sum_{\ell;(\tau,\ell)\in\text{mauvais}} \|\widehat{f_{\tau,\ell}}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}d\tau \leqslant D^{-1}\int_{-2}^{2}\sum_{\ell;(\tau,\ell)\in\text{mauvais}} \|e^{\frac{c_1\rho}{2}}\widehat{f_{\tau,\ell}}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}d\tau \leqslant \frac{C}{D}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

où on a utilisé (33). Par l'inégalité (30) du lemme 3.13, $c_1\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \int_{-2}^2\sum_\ell \|f_{\tau,\ell}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}d\tau$ donc on obtient

$$\begin{aligned}\left(c_1-\frac{C}{D}\right)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leqslant c_1\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \int_{-2}^{2}\sum_{(\tau,\ell)\in\text{mauvais}} \|\widehat{f_{\tau,\ell}}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}d\tau \\ &\leqslant \int_{-2}^{2}\sum_{\ell;(\tau,\ell)\in\text{bon}} \|\widehat{f_{\tau,\ell}}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}d\tau.\end{aligned}$$

Donc en choisissant $D>0$ assez grand, on peut s'assurer que $\left(c_1-\frac{C}{D}\right)>0$.

Par le théorème 3.8 de Logvinenko–Sereda, pour les bonnes paires (τ,ℓ), on trouve immédiatement $\|f_{\tau,\ell}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C_{LS}\|f_{\tau,\ell}\|^2_{L^2(E)}$ où la constante C_{LS} provient du théorème de Logvinenko–Sereda. Donc pour le moment, on a montré que

$$\left(c_1-\frac{C}{D}\right)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \int_{-2}^{2}\sum_{\ell;(\tau,\ell)\in\text{bon}} \|\widehat{f_{\tau,\ell}}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}d\tau \leqslant C_{LS}\int_{-2}^{2}\sum_{\ell;(\tau,\ell)\in\text{bon}} \|f_{\tau,\ell}\|^2_{L^2(E)}d\tau. \tag{35}$$

Maintenant pour conclure, il reste à comparer $\sum_{\ell;(\tau,\ell)\in\mathrm{bon}} \|f_{\tau,\ell}\|^2_{L^2(E)}$ avec $\|f\|^2_{L^2(E_\sigma)}$ où il y a une perte comme on prend un voisinage $E_\sigma = E + [-\sigma,\sigma]$. Nous utilisons une relation algébrique cruciale, comme la fonction φ_ℓ est à support compact dans $[-\sigma,\sigma]$:

$$\begin{aligned}((f.e_{-t_\ell-\tau})\star\varphi_\ell)\,1_E(x) &= \int_{\mathbb{R}} 1_E(x)1_{E_\sigma}(y)(f.e_{-t_\ell-\tau})(y)\varphi_\ell(x-y)dy\\ &= ((f.e_{-t_\ell-\tau}1_{E_\sigma})\star\varphi_\ell)\,1_E(x)\end{aligned}$$

car $1_E(x)\varphi_\ell(x-y) = 1_{E_\sigma}(y)1_E(x)\varphi_\ell(x-y)$ puisque $x\in E, x-y\in[-\sigma,\sigma] \implies y\in E_\sigma$. C'est à cette étape cruciale qu'on utilise la compacité du support de φ_ℓ. Ensuite :

$$\begin{aligned}\|f_{\tau,\ell}\|^2_{L^2(E)} = \|f_{\tau,\ell}1_E\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \|\,((f.e_{-t_\ell-\tau}1_{E_\sigma})\star\varphi_\ell)\,1_E\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\\ &\leqslant \|\,((f.e_{-t_\ell-\tau}1_{E_\sigma})\star\varphi_\ell)\,\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|\mathcal{F}\,(f.e_{-t_\ell-\tau}1_{E_\sigma})\,\widehat{\varphi_\ell}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\\ &= \|\widehat{f1_{E_\sigma}}(.+\tau+t_\ell)\widehat{\varphi_\ell}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \text{ (par Plancherel).}\end{aligned} \tag{36}$$

Donc on reprend l'inégalité (35) combinée avec (36) nous donne

$$\begin{aligned}\left(c_1 - \frac{C}{D}\right)\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leqslant C_{LS}\int_{-2}^{2}\sum_{\ell;(\tau,\ell)\in\mathrm{bon}}\|f_{\tau,\ell}\|^2_{L^2(E)}d\tau\\ &\leqslant C_{LS}\int_{-2}^{2}\sum_{\ell;(\tau,\ell)\in\mathrm{bon}}\|\widehat{f1_{E_\sigma}}(.+\tau+t_\ell)\widehat{\varphi_\ell}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}d\tau\\ &\lesssim \underbrace{CC_{LS}\|\widehat{f1_{E_\sigma}}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}}_{\text{par l'estimée (34)}} = \underbrace{CC_{LS}\|f\|^2_{L^2(E_\sigma)}}_{\text{par Plancherel}}.\end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve du théorème 3.10.

3.7. Principe d'itération sur les échelles et preuve du principe d'incertitude fractal.

Pour conclure la preuve du théorème 3.1, il reste à itérer sur les échelles l'inégalité de prolongement unique. On part de (X,Y) ν-poreux sur une échelle $[\hbar,1]$. On fixe K un entier et on suppose sans perte de généralité que $\hbar = 2^{-K}$, pour tout $k\in\{0,\dots,K\}$, on considère la partition dyadique $\mathcal{I}(k) = \{[j2^{-k},(j+1)2^{-k}]; j\in\mathbb{Z}\}$.

Comme X est ν-poreux de l'échelle $\hbar$ à 1, pour chaque $I\in\mathcal{I}(k)$, il existe un sous intervalle $I'\subset I$ tel que $|I'| = \nu|I| = 2^{-k}\nu$, $I'\cap X=\emptyset$. On pose $U'_k = \bigcup_{I\in\mathcal{I}(k)} I'\subset\mathbb{R}$, $U'_k\cap X = \emptyset$ et $X_k = \mathbb{R}\setminus U'_k$ où X_k est une *image approximative* de X à la résolution 2^{-k+1}.

L'idée centrale est de minorer f sur l'ensemble U'_k contenu dans le complémentaire de X mais à l'échelle $\nu 2^{-k}$.

Proposition 3.15 (Minoration de la masse sur le complémentaire)
Il existe $c = c(\nu) > 0$ tel que pour tout $k\in\mathbb{N}$ et $f\in L^2(\mathbb{R})$

$$\boxed{\mathit{supp}\left(\widehat{f}\right)\subset\hbar^{-1}Y + [-2^k,2^k] \implies \|f\|_{L^2(U'_k)}\geqslant c\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.} \tag{37}$$

Démonstration. — Nous allons déduire cette Proposition du théorème 3.10 par un simple argument de changement d'échelle. On rappelle que si X, Y sont ν-poreux sur une échelle $[\hbar, 1]$, il existe C telle que

$$\operatorname{supp}(\widehat{f}) \subset \hbar^{-1}Y + [-1,1] \implies \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C\|f\|^2_{L^2(E)} \tag{38}$$

où $E = U_0'$ est bien ν-épais par le fait que X est ν-poreux d'après le lemme trivial 3.9 [16]. La constante C ne dépend ni de $\hbar$ ni de E comme le lecteur pourra vérifier en inspectant la preuve du théorème 3.10.

Maintenant, on se donne f telle que $\widehat{f}$ est supportée sur $\hbar^{-1}Y + [-2^k, 2^k]$ et l'ensemble $E_k = \mathbb{R} \setminus X_k$ avec $X_k = X + [-2^{-k}, 2^{-k}]$. Alors on observe que $\widehat{f}(2^k.)$ est supportée sur l'ensemble $(2^{-k}\hbar^{-1})Y + [-1,1] \subset [-\hbar^{-1} - 1, \hbar^{-1} + 1]$ et l'ensemble 2^kE_k est ν-épais comme E_0. Par transformée de Fourier inverse, posons la fonction $\tilde{f} = 2^{-k}f(2^{-k}.)$ qui satisfait les hypothèses du théorème 3.10 avec $\tilde{\hbar} = 2^k\hbar$ mais comme la constante C de l'estimée (28) ne dépend pas de $\tilde{\hbar} \geqslant \hbar$ on trouve :

$$\underbrace{\|\tilde{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}}_{=2^{-k}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}} \leqslant C \underbrace{\|\tilde{f}\|^2_{L^2(2^kE_k)}}_{=2^{-k}\|f\|^2_{L^2(E_k)}} \implies \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C\|f\|^2_{L^2(E_k)}. \tag{39}$$ □

On va itérer l'estimée de la proposition 3.15 en utilisant la structure héréditaire approximative de X qui est une conséquence de la ν-porosité. On doit impérativement penser à X_k comme à **une approximation dyadique** de X à l'échelle 2^{-k} [17]. On observe que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on a l'inclusion $X \subset X_k$ d'où $X \subset X_k \cap \cdots \cap X_0$ d'où l'on déduit $1_X \leqslant 1_{X_0 \cap \cdots \cap X_k} = 1_{X_0} \ldots 1_{X_k}$ et donc

$$\|1_X f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(X)} \leqslant \|1_{X_0} \ldots 1_{X_k} f\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Maintenant, on aimerait itérer l'estimée de prolongement unique en commençant avec $1_{X_0}f$:

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(\widehat{f}) \subset \hbar^{-1}Y + [-1,1] &\implies \|f\|^2_{L^2(U_0')} \geqslant c^2\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\implies \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \|f\|^2_{L^2(X_0)} = \|f\|^2_{L^2(U_0')} \geqslant c^2\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

par Pythagore et, comme $X_0 = \mathbb{R} \setminus U_0'$,

$$\implies \|1_{X_0}f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \sqrt{1-c^2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Imaginons que $1_{X_0}f$ était à support de Fourier borné contenu dans $\hbar^{-1}Y + [-2,2]$, alors on pourrait poursuivre en majorant $1_{X_1}1_{X_0}f$. On voudrait itérer cette estimation

16. Ce fait ne dépend pas de $\hbar$ car on teste l'épaisseur en intersectant avec des intervalles de largeur 1, on a fait un petit abus car le théorème 3.10 ne s'applique que à un épaississement E_σ d'un ensemble épais E. Mais ici, quitte à un peu rétrécir les I' en prenant des intervalles I'' avec même centre que I' mais largeur $\frac{9}{10}\nu$ puis appliquer le théorème à $E = \cup I''$ et $\sigma = \frac{\nu}{10}$, on se ramène à la situation où $E_\sigma = U_0'$.

17. Penser à une analogie avec une télévision et la résolution de ses pixels.

pour obtenir

$$\begin{aligned}\|1_{X_k}\dots 1_{X_0}f\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leqslant \sqrt{1-c^2}\|1_{X_{k-1}}\dots 1_{X_0}f\|_{L^2(\mathbb{R})}\\ &\leqslant \dots \leqslant (\sqrt{1-c^2})^p\|1_{X_{k-p}}\dots 1_{X_0}f\|_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Mais le problème c'est que $1_{X_{k-1}}\dots 1_{X_0}f$ n'est plus de transformée de Fourier à support compact à cause de la multiplication par les indicatrices [18]. L'idée principale est de régulariser les indicatrices par convolution avec une fonction de Schwartz positive dont la transformée de Fourier est à support compact. Choisissons un k_0 (qu'on va ajuster plus tard en fonction de la constante de prolongement unique C et de la constante de porosité ν) et posons :

$$\chi_k = 1_{X_k}\star\psi_k,\ \ \psi_k(.) = 2^{k+k_0}\psi(2^{k+k_0}.)$$

$\mathrm{supp}(\widehat{\psi})\subset[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ et $\int\psi = 1$. Par le comportement de la transformée de Fourier par changement d'échelle, on trouve que $\widehat{\psi_k} = 2^{k+k_0}\psi\widehat{(2^{k+k_0}.)} = \widehat{\psi}(2^{-k-k_0}.)$ donc $\mathrm{supp}(\widehat{\psi_k})\subset 2^{k+k_0}[-2^{-1},2^{-1}] = [-2^{k+k_0-1},2^{k+k_0-1}]$. On observe que $\mathrm{supp}(\widehat{\chi_k}) = \mathrm{supp}(\widehat{\psi_k}\times\widehat{1_{X_k}})\subset\mathrm{supp}(\widehat{\psi_k})\subset[-2^{k+k_0-1},2^{k+k_0-1}]$.

On va poser une variante de la fonction $1_{X_0}\dots 1_{X_k}f$ où on aura convolé toutes les indicatrices, soit pour k multiple de k_0, la suite de fonctions :

$$f_k = \chi_0\chi_{k_0}\cdots\chi_{k-k_0}\chi_k f \tag{40}$$

où le produit porte sur les multiples de k_0 de 0 à k. Il est évident que $\|1_{X_0}\dots 1_{X_k}f\|_{L^2(\mathbb{R})}\leqslant\|f_k\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Le fait que les transformées de Fourier des χ_k sont à support compact nous permettra d'appliquer l'inégalité de prolongement unique à toutes les itérations. On se rappelle qu'on part de $\mathrm{supp}(\widehat{f})\subset\hbar^{-1}Y$ qui est l'hypothèse du principe d'incertitude fractal. Ensuite, on trouve

$$\mathrm{supp}(\widehat{\chi_0 f}) = \mathrm{supp}(\widehat{\chi_0}) + \mathrm{supp}(\widehat{f})\subset\mathrm{supp}(\widehat{f}) + [-2^{k_0-1},2^{k_0-1}]$$

puis en itérant

$$\begin{aligned}\mathrm{supp}\left(\mathcal{F}\left(\chi_{k-1}\dots\chi_0 f\right)\right) &\subset \mathrm{supp}(\widehat{\chi_k}) + \dots + \mathrm{supp}(\widehat{\chi_0}) + \mathrm{supp}(\widehat{f})\\ &\subset \mathrm{supp}(\widehat{f}) + [-2^{k_0-1},2^{k_0-1}] + \dots + [-2^{k+k_0-1},2^{k+k_0-1}].\end{aligned}$$

On reconnait une série géométrique $2^{k_0-1}+\dots+2^{k+k_0-1} = 2^{k_0-1}(1+\dots+2^{k_0\frac{k}{k_0}}) = 2^{k_0-1}\frac{1-2^{k+k_0}}{1-2^{k_0}}\leqslant 2^{k+k_0}$ pour k_0 assez grand. Donc au final on trouve que

$$\mathrm{supp}(\widehat{f_{k-k_0}})\subset\mathrm{supp}(\widehat{f}) + [-2^k,2^k]\subset\hbar^{-1}Y + [-2^k,2^k]$$

et $\widehat{f_{k-k_0}}$ satisfait aux hypothèses de la Proposition 3.15. Cela veut dire que $\|f_{k-k_0}\|_{L^2(U_k')}\geqslant c\|f_{k-k_0}\|_{L^2(\mathbb{R})}$ donc

$$\|1_{X_k}f_{k-k_0}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f_{k-k_0}\|_{L^2(X_k)}\leqslant\sqrt{1-c^2}\|f_{k-k_0}\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{41}$$

18. En effet les indicatrices étant à support compact, leur transformée de Fourier est analytique par Paley–Wiener.

Rappelons qu'on aimerait comparer $\|f_k = \chi_k f_{k-k_0}\|_{L^2(\mathbb{R})}$ au lieu de $\|1_{X_k} f_{k-k_0}\|_{L^2(\mathbb{R})}$ avec $\|f_{k-k_0}\|_{L^2(\mathbb{R})}$ mais le problème vient du fait que le support de χ_k est $\mathbb{R}$ tout entier et non X_k donc on va s'arranger pour que $\chi_k \leqslant \frac{1}{2}$ sur le complémentaire U'_k de X_k. On répète l'argument ci-dessus mais cette fois-ci avec χ_k, on part de :

$$\|\chi_k f_{k-k_0}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|\chi_k f_{k-k_0}\|^2_{L^2(X_k)} + \|\chi_k f_{k-k_0}\|^2_{L^2(U'_k)}.$$

En utilisant $\chi_k \leqslant \frac{1}{2}$ sur U'_k et $\chi_k \leqslant 1$ partout, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|\chi_k f_{k-k_0}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\underset{\text{Pythagore}}{=} \|\chi_k f_{k-k_0}\|^2_{L^2(U'_k)} + \|\chi_k f_{k-k_0}\|^2_{L^2(X_k)} \\
&\leqslant \underbrace{\frac{1}{4}\|f_{k-k_0}\|^2_{L^2(U'_k)}}_{\text{car } \chi_k|_{U'_k} \leqslant \frac{1}{2}} + \underbrace{\|f_{k-k_0}\|^2_{L^2(X_k)}}_{\text{car } \chi_k \leqslant 1} \\
&\leqslant \underbrace{\frac{1}{4}\|f_{k-k_0}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}}_{\text{Pythagore}} + \frac{3}{4}\|f_{k-k_0}\|^2_{L^2(X_k)} \\
&\leqslant \left(\frac{1}{4} + \underbrace{\frac{3}{4}(1-c^2)}_{\text{par inégalité (41)}}\right)\|f_{k-k_0}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que pour tout k multiple de k_0 et $k > k_0$ on a

$$\|\chi_k f_{k-k_0}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \underbrace{(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}(1-c^2))}_{<1}^{\frac{k}{k_0}} \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{42}$$

En prenant k_0 assez grand [19] et en rétrécissant les intervalles I' [20], on peut supposer que pour tout k multiple de k_0 on a $\chi_k|_X \geqslant (1 - \frac{1}{2^{k_0}})$ et on peut conclure

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L^2(X)} \leqslant \|1_X \prod_{k_0|k|K} 1_{X_k} f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leqslant \|1_X \frac{\left(\prod_{k_0|k|K} \chi_k\right)}{(1-2^{-k_0})^{\frac{K}{k_0}}} f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leqslant (1-2^{-k_0})^{-\frac{K}{k_0}} \|\prod_{k_0|k|K} \chi_k f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \frac{(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}(1-c^2))^{\frac{K}{k_0}}}{(1-2^{-k_0})^{\frac{K}{k_0}}} \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

où le produit porte sur tous les k multiples de k_0 mais qui divisent K. Donc en prenant k_0 assez grand pour que $\frac{(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}(1-c^2))}{(1-2^{-k_0})} < 1$ et comme $K \sim |\log(\hbar)|$ on obtient la borne du principe d'incertitude fractal.

19. Pour rendre plus piquée la fonction test ψ_k.

20. quitte à prendre des intervalles I'' de même centre que les I' mais plus petit ce qui a pour effet d'agrandir les X_k et donc la restriction $1_{X_k} \star \psi_k|_X$ sera plus grande.

4. APPLICATIONS DU PRINCIPE D'INCERTITUDE FRACTAL.

4.1. Introduction.

Dans cette section, nous discutons des applications spectaculaires du principe d'incertitude fractal à des problèmes d'analyse géométrique sur les surfaces hyperboliques (à courbure négative constante). L'objectif de la section n'est pas de développer les preuves (difficiles) des articles Bourgain et Dyatlov (2017, 2018), Dyatlov, Jin et Nonnenmacher (2019) et Dyatlov et Zahl (2016) concernant les applications du principe d'incertitude fractal, mais de décrire le cadre et les motivations qui mènent à ces travaux, ainsi que quelques idées de preuves. Nous commencerons par rappeler le contexte géométrique.

4.2. Contexte géométrique.

Soit (M, g) une surface à courbure négative constante (surface hyperbolique). On note T^*M le fibré cotangent de M et S^*M le fibré cotangent unitaire. La métrique g définit un hamiltonien dans T^*M qui engendre le flot géodésique de T^*M qui conserve la mesure de Liouville sur T^*M. Soit Δ_g l'opérateur de Laplace–Beltrami, il est bien connu que sur une variété compacte (M, g), l'opérateur Δ_g est autoadjoint à résolvante compacte et admet une résolution spectrale. Concrètement, il existe une base orthonormée $(e_\lambda)_{\lambda\in\sigma(\Delta_g)}$ de $L^2(M)$, indicée par $\sigma(\Delta_g) = \{0 \leqslant \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots\} \subset \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ où les valeurs propres sont comptées avec multiplicité :

$$\Delta_g e_\lambda = \lambda e_\lambda, e_\lambda \in C^\infty(M), \|e_\lambda\|_{L^2(M)} = 1.$$

Il est bien connu que pour M à courbure négative, le flot géodésique $\varphi^t \colon S^*M \to S^*M$ est ergodique pour la mesure de Liouville μ (voir Katok et Hasselblatt, 1997).

4.2.1. *Rappels informels sur le calcul pseudodifférentiel.* — L'objectif de ce paragraphe est de donner au lecteur une idée un peu intuitive du calcul pseudodifférentiel et nous renvoyons le lecteur à des ouvrages plus spécialisés comme celui de Zworski (2012) pour plus de détails. Commençons par des exemples simples sur $\mathbb{R}^d$. On aimerait construire un cadre qui mettrait sur pied d'égalité des opérateurs de multiplication par une fonction lisse $m_f \colon u \in L^2 \mapsto fu \in L^2$, et des opérateurs différentiels à coefficients constants $u \mapsto P(D)u$ où P est un polynôme. Bien sûr, on sait que si l'on décompose une fonction u en Fourier, l'opérateur différentiel agira comme une multiplication par un polynôme. Donc un peu à la manière de la transformée de Fourier, l'idée est de décomposer une fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ dans un intégrale oscillante, puis d'agir par multiplication par des fonctions $A(x; \xi)$ sur le cotangent $T^*\mathbb{R}^d$, appelés symboles. La correspondance qui à un symbole A associe l'opérateur $\mathrm{Op}_\hbar(A)$ correspondant s'appelle une quantification. En pratique, on peut donner une formule explicite dans $\mathbb{R}^d$ de telles quantifications qui reposent sur la transformée de Fourier, pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$\mathrm{Op}_\hbar(a)(u) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_{\mathbb{R}^d} a(x; \xi) e^{i\frac{\xi.(x-y)}{\hbar}} u(y) d^d\xi \tag{43}$$

où $a(x;\xi)$ appelé **symbole** est a priori un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$, on doit y penser comme à une fonction sur le cotangent. On peut ensuite généraliser cette procédure de quantification à des classes plus larges de symboles que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ pour lesquels on renvoie le lecteur aux ouvrages plus spécialisés. Vérifions qu'on retrouve bien les opérateurs de multiplication et différentiels. Les opérateurs de multiplication m_f se retrouvent en posant $a(x;\xi) = f(x)$ et les opérateurs différentiels usuels par $P(D_x)u = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} a(x;\xi)e^{i\xi.(x-y)}u(y)d^d\xi$ où $a(x;\xi) = P(\xi)$, $D_x = i\partial_x$. Il est aussi utile de rappeler qu'une bonne procédure de quantification doit satisfaire aux propriétés suivantes :

1. **Théorème de composition** : $\mathrm{Op}_\hbar(a) \circ \mathrm{Op}_\hbar(b) = \mathrm{Op}_\hbar(ab) + \mathcal{O}(\hbar)_{L^2\to L^2}$ pour $(a,b) \in C_0^\infty(T^*M)^2$.
2. **Calderon–Vaillancourt** : un symbole borné définit un opérateur borné dans L^2, si $a \in C_0^\infty(T^*M)$ alors $\|\mathrm{Op}_\hbar(a)\|_{L^2\to L^2} \leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant D}\hbar^{\frac{|\alpha|}{2}}\|\partial^\alpha a\|_{L^\infty(T^*M)}$ où les constantes C, D dépendent de la variété M.
3. **Identité du commutateur** : $[\mathrm{Op}_\hbar(a), \mathrm{Op}_\hbar(b)] = -i\hbar\,\mathrm{Op}_\hbar(\{a,b\}) + \mathcal{O}(\hbar^2)_{L^2\to L^2}$ où $\{.,.\}$ désigne le crochet de Poisson.
4. **Théorème d'Egorov** : soit $T > 0$ et $a \in C_0^\infty(T^*M)$ tel que le support de a ne rencontre pas la section nulle. Alors on a $e^{it\sqrt{\Delta_g}}\mathrm{Op}_\hbar(a)e^{-it\sqrt{\Delta_g}} = \mathrm{Op}_\hbar(a\circ\varphi^t) + \mathcal{O}(\hbar)_{L^2\to L^2}$ pour tout $t \in [0,T]$ et où $\varphi^t\colon T^*M \to T^*M$ est un flot homogène de degré 0 dont la restriction à S^*M coïncide avec le flot géodésique [21]. Conjuguer par le propagateur des ondes revient donc à propager le symbole par une version renormalisée du flot géodésique.

4.3. Enonce des principales applications.

4.3.1. *Le prolongement unique pour les fonctions propres.* — Le premier théorème est une généralisation spectaculaire du principe de prolongement unique pour les fonctions propres du laplacien sur M.

Théorème 4.1 (Dyatlov et Jin, 2018b). — *Soit (M,g) une surface à courbure négative constante. Soit $U \subset M$ un ouvert non vide. Alors il existe une constante $c > 0$, telle que pour toute solution $e_\lambda \in L^2(M)$ de $\Delta_g e_\lambda = \lambda e_\lambda$, $\|e_\lambda\|^2_{L^2(M)} = 1$:*

$$\|e_\lambda\|^2_{L^2(U)} \geqslant c > 0. \tag{44}$$

Signalons que ce résultat a été généralisé au cas des surfaces à courbure négative variable par Dyatlov, Jin et Nonnenmacher (2019). Pour des λ bornés, l'inégalité 44 est une conséquence immédiate du principe de prolongement unique. En effet, sur une variété riemannienne compacte M quelconque, pour toute solution $e_\lambda \in L^2(M)$ de

21. Le fait de conjuguer par le propagateur demi-onde fait que le flot φ^t est homogène de degré 0 par rapport au changement d'échelle $(x;\xi) \mapsto (x;\lambda\xi)$, pour avoir le vrai flot géodésique il aurait fallu conjuguer par le propagateur de Schrödinger $e^{\frac{it\hbar\Delta_g}{2}}$.

$\Delta_g e_\lambda = \lambda e_\lambda$, $\|e_\lambda\|^2_{L^2(M)} = 1$, JERISON et LEBEAU (1999) et LEBEAU et ZUAZUA (1998) ont montré une inégalité de prolongement unique de la forme [22] :

$$\|e_\lambda\|^2_{L^2(U)} \geqslant \frac{e^{-C\sqrt{\lambda}}}{C} \tag{45}$$

où on voit que le terme de droite devient exponentiellement petit comme $\mathcal{O}(e^{-C\sqrt{\lambda}})$ quand l'énergie $\lambda \to +\infty$. De plus, signalons que sur une variété riemannienne compacte quelconque, sans aucune hypothèse de courbure, un résultat de LOGUNOV et MALINNIKOVA (2018) montre une inégalité de type Remez :

$$(\Delta_g - \lambda)\, u = 0 \implies \sup_U |u| \geqslant \frac{1}{C} \underbrace{\left(\frac{\mathrm{Vol}_g\,(U)}{C}\right)^{-C\sqrt{\lambda}}}_{\text{perte exponentielle}} \sup_M |u| \tag{46}$$

où on voit la même décroissance exponentielle dans le terme de droite. Cette estimée de type Remez est optimale au sens où sur la sphère $\mathbb{S}^2$, pour toute boule $B(x_0, r)$ de rayon r suffisamment petit, on peut trouver une sous-suite de fonctions propres de norme 1 du laplacien, telle que $\|e_\lambda\|^2_{L^2(B(x_0,r))} \leqslant ce^{-c\sqrt{\lambda}}$. Donc la force du théorème 4.1 réside dans le fait que la constante c **ne dépend pas** de $\lambda \in \sigma(\Delta_g)$.

Ceci illustre le fait que le résultat de Dyatlov–Jin utilise forcément la géométrie de la variété, ici via l'hyperbolicité du flot géodésique qui va nous permettre d'appliquer le principe d'incertitude fractal. En fait, le théorème 4.1 est une conséquence d'un résultat plus général qui fait intervenir des notions de calcul pseudodifférentiel :

THÉORÈME 4.2. — *Soit (M, g) une surface à courbure négative constante. Supposons que $a \in C^\infty_0(T^*M)$ et $a|_{S^*M}$ non nulle. Alors il existe des constantes $C, \hbar_0 > 0$ telles que pour tout $\hbar < \hbar_0$*

$$\|u\|_{L^2(M)} \leqslant C\| \operatorname{Op}_\hbar(a)u\|_{L^2(M)} + C\frac{|\log(\hbar)|}{\hbar}\| \left(\hbar^2\Delta_g - 1\right) u\|_{L^2(M)}. \tag{47}$$

Remarque 4.3. — Pour une métrique g quelconque sur M, si toutes les géodésiques intersectent $a \neq 0$, on dit dans ce cas que a satisfait l'hypothèse de contrôle géométrique, alors l'inégalité (47) est automatiquement satisfaite **sans aucune hypothèse sur la métrique** et sans le terme en $|\log(\hbar)|$.

Pour voir pourquoi ce théorème implique le théorème 4.1, on applique le résultat à des fonctions propres auquel cas $(\hbar^2\Delta_g - 1)\, u = 0$ et on posera une fonction bosse $b \in C^\infty_0(U), 0 \leqslant b \leqslant 1$, b est supportée dans l'ouvert U et soit $\chi \in C^\infty_0(T^*M)$, $\chi = 0$ près de la section nulle et $\chi = 1$ près de $S^*M \subset T^*M$. Dans ce cas, le produit $a = \chi b$

22. Voir en particulier JERISON et LEBEAU (1999, Thm 14.6 p. 230) qui se démontre à l'aide des inégalités de Carleman et dont la méthode de preuve s'inspire des travaux de DONNELLY et FEFFERMAN (1988).

satisfait les hypothèses du théorème 4.2 et on peut majorer $\| \operatorname{Op}_\hbar(a)u\|_{L^2(M)}$ de la façon suivante :

$$\underbrace{\| \operatorname{Op}_\hbar(\chi b)u\|_{L^2(M)} \leqslant \| \operatorname{Op}_\hbar(\chi)\|_{L^2\to L^2}\|bu\|_{L^2(M)} + \mathcal{O}(\hbar)\|u\|_{L^2(M)}}_{\text{par Calderon–Vaillancourt et théorème de composition}}$$
$$\leqslant \|u\|_{L^2(U)} + \mathcal{O}(\hbar)\|u\|_{L^2(M)}$$

et on remplace à droite de (47) en absorbant le terme de reste en $\mathcal{O}(\hbar)$, ce qui donne (44).

4.3.2. *Le support des mesures semiclassiques.* — Nous allons reformuler les résultats du paragraphe précédent en terme de mesures semi-classiques. Mais insistons que ce sont en réalité des corollaires du théorème 4.2. Nous rappelons la définition des mesures de Wigner appelées parfois mesures semiclassiques. Ces objets sont étudiés en mathématiques dans les premiers travaux sur l'ergodicité quantique de Shnirelman (1974a), Zelditch (1987) et Colin De Verdière (1985) puis ont été introduit de façon systématique en EDP par Tartar (1990) et Gérard (1991) (voir aussi Lions et Paul (1993)).

Définition 4.4 (Mesures semi-classiques). — *Soit $a \in C_0^\infty(T^*M)$ et $\operatorname{Op}_\hbar(a) \in \Psi^0(M)$ l'opérateur pseudodifférentiel correspondant. Une mesure μ sur S^*M est une mesure de Wigner si il existe une sous-suite $(e_{\lambda_k})_k$ de fonctions propres de Δ_g, normalisée dans L^2, telle que*[23]

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \left\langle e_{\lambda_k}, \operatorname{Op}_{\hbar_k}(a)e_{\lambda_k}\right\rangle = \int_{S^*M} a(x;\xi)d\mu(x;\xi).} \tag{48}$$

Noter que le paramètre semiclassique $\hbar_k$, qui joue le rôle d'une longueur d'onde doit être ajusté égal à $\lambda_k^{-\frac{1}{2}}$ dans le membre de gauche de l'égalité.

C'est une conséquence du théorème d'Egorov que les mesures semiclassiques sont des mesures de probabilité sur S^*M invariantes par le flot géodésique.

Une conséquence spectaculaire du théorème 4.2 pour les mesures de Wigner s'énonce comme :

Théorème 4.5 (Dyatlov et Jin, 2018b). — *Soit (M, g) une surface à courbure négative constante. Toute mesure semiclassique μ sur S^*M est de support total.*

Ce théorème a également été généralisé à la courbure négative variable dans Dyatlov, Jin et Nonnenmacher (2019) et par Schwartz (2021) pour les mesures semiclassiques de l'application du chat quantique. La question de savoir quelle mesure invariante par le flot géodésique est semiclassique est un problème très étudié en chaos quantique. Le théorème d'ergodicité quantique de Shnirelman (1974a,b), Zelditch (1987) et Colin De Verdière (1985) montre que la mesure de Liouville est une mesure semiclassique obtenue en prenant une limite le long d'une sous-suite de densité 1 de fonctions propres.

23. La convergence a lieu au sens de la topologie faible sur les fonctions de T^*M.

Rudnick et Sarnak (1994) ont conjecturé que la mesure de Liouville est l'unique mesure semiclassique sur les variétés compactes à courbure négative stricte. Pour le moment, cette conjecture, appelée QUE pour "Quantum Unique Ergodicity conjecture", n'a été prouvée que dans le cas des fonctions propres de Hecke sur les surfaces arithmétiques par Lindenstrauss (2006). La QUE sur les surfaces hyperboliques est un problème ouvert. Le résultat du théorème 4.5 est une avancée spectaculaire venant compléter la percée d'Anantharaman (2008), Anantharaman, Koch et Nonnenmacher (2009) et Anantharaman et Nonnenmacher (2007) qui ont minoré l'entropie des mesures semiclassiques sur les variétés à courbure négative. Ils montrent que toute mesure semiclassique μ a son entropie de Kolmogorov–Sinai minorée par $\frac{\dim(M)-1}{2}$ quand la métrique est à courbure sectionnelle constante égale à -1. Ce résultat a été étendu par Rivière (2010) au cas des surfaces à courbure négative variable. Nous renvoyons le lecteur souhaitant en savoir plus au séminaire Bourbaki sur le sujet par Colin De Verdière (2007). Cette borne entropique exclut tout un tas de mesures invariantes, par exemple les mesures portées par les géodésiques fermées.

Montrons comment le fait que les mesures semiclassiques chargent tout le cotangent suit du théorème 4.2. Soit $(e_{\lambda_k})_k$ une sous-suite de fonctions propres définissant une mesure semiclassique μ, soit $a \in C_0^\infty(T^*M)$, $a \geqslant 0$ et $a|_{S^*M} \neq 0$ alors :

$$\begin{aligned} 1 = \|e_{\lambda_k}\|^2_{L^2(M)} &\leqslant C^2 \| \operatorname{Op}_{\hbar_k}(a) e_{\lambda_k}\|^2_{L^2(M)} = C^2 \left\langle e_{\lambda_k}, \operatorname{Op}_{\hbar_k}(a)^* \operatorname{Op}_{\hbar_k}(a) e_{\lambda_k} \right\rangle \\ &= C^2 \underbrace{\left\langle e_{\lambda_k}, \operatorname{Op}_{\hbar_k}(|a|^2) e_{\lambda_k} \right\rangle + \mathcal{O}(\hbar)}_{\text{thm de composition}} \end{aligned}$$

donc $\lim_{k\to+\infty} \left\langle e_{\lambda_k}, \operatorname{Op}_{\hbar_k}(|a|^2) e_{\lambda_k} \right\rangle + \mathcal{O}(\hbar) = \int_{S^*M} |a|^2 d\mu \geqslant C^{-2} > 0$ [24] et donc μ charge tout S^*M puisque le support de $a|_{S^*M}$ est arbitraire.

4.3.3. *Le trou spectral pour la fonction zêta de Selberg.* — Soit (M, g) une surface hyperbolique convexe cocompacte (**noncompacte**) de courbure -1. Une telle surface est obtenue en quotientant le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ par un groupe de Schottky Γ comme décrit au paragraphe 1.3.2. Γ est finiment engendré de telle sorte qu'un domaine fondamental voit son bord qui ne touche pas l'ensemble limite Λ_Γ. Ces surfaces, bien qu'étant de volume infini, sont de genre fini, les géodésiques périodiques forment un ensemble dénombrable et la structure de l'infini est raisonnable. On peut multiplier la métrique par un facteur conforme de façon à voir M comme une variété compacte à bord lisse, dont les bouts ont la forme de trompettes.

Exemple 4.6 (Pantalon hyperbolique). — Considérons la sphère $\mathbb{S}^2$ privée de trois points qu'on peut munir d'une métrique hyperbolique de courbure -1. Ensuite on coupe le long des trois géodésiques fermées pour cette métrique autour des points enlevés, ce qui donne une surface à bords dont le bord, totalement géodésique, a trois composantes connexes. Dans ce cas le groupe Γ est le groupe libre à deux générateurs et $M = \Gamma \setminus \mathbb{H}^2$.

24. $\hbar_k = \lambda_k^{-\frac{1}{2}}$ tend vers 0 quand $k \to +\infty$.

Définition 4.7 (Fonction zêta de Selberg). — *Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des orbites périodiques primitives du flot géodésique. Pour chaque géodésique périodique γ, on va noter $\ell(\gamma)$ sa longueur qui correspond aussi à la période de γ. On définit la fonction zêta de Selberg comme le produit infini :*

$$Z_M(s) = \prod_{k=0}^{\infty} \prod_{\gamma \in \mathcal{P}} \left(1 - e^{-(s+k)\ell(\gamma)}\right) \tag{49}$$

qui converge sur le demi-plan $\Re(s) > 1$ et qui se prolonge de façon méromorphe au plan complexe.

Expliquons les résultats dans le contexte le plus simple. En faisant le lien avec le spectre du laplacien, ce qui remonte aux travaux de Lax et Phillips (2016), on peut montrer que Z_M n'admet qu'un nombre fini de zéros dans le demi-plan $\Re(s) > \frac{1}{2}$ qui correspondent à des valeurs propres L^2 du laplacien. Par contre, la situation est différente pour les zéros dans le demi plan $\Re(s) \leqslant \frac{1}{2}$ qui ne s'interprètent plus comme valeurs propres isolées du laplacien autoadjoint agissant sur $L^2(M)$ mais plutôt comme des **résonances** du laplacien, autrement dit des pôles du prolongement méromorphe de la résolvante $(\Delta_g - s(1-s))^{-1} \colon L^2_{comp}(M) \to H^2_{loc}(M)$ dû à Mazzeo et Melrose (1987), Guillopé et Zworski (1997), Guillarmou (2005). Une question naturelle est de savoir si M a un **trou spectral**, autrement dit si il existe $\beta > 0$ tel que $Z_M(s)$ admet un nombre fini de zéros dans $\Re(s) > \frac{1}{2} - \beta$.

Les résultats classiques s'expriment en terme de l'exposant critique $\delta \in [0, 1)$ qui précise le domaine de convergence des séries de Poincaré [25] :

Définition 4.8 (Exposant δ). — *Soit $(x, y) \in M^2$ une paire de points sur la variété M, alors δ est défini comme l'infimum des r tels que la série*

$$\sum_{\gamma} e^{-r\ell(\gamma)} \tag{50}$$

converge où la somme porte sur les arcs géodésiques reliant x et y.

On donne une autre interprétation de cet exposant critique δ en termes de l'ensemble captif, c'est à dire l'ensemble des géodésiques qui ne s'échappent pas à l'infini quand $|t| \to +\infty$, et de l'ensemble limite qui sont proches de nos préoccupations sur les fractales : la dimension de Minkowski de l'ensemble captif du flot géodésique dans S^*M vaut $2\delta + 1$. De même, comme $M = \Gamma \setminus \mathbb{H}^2$, on définit l'ensemble limite (voir paragraphe 1.3.2) comme

$$\Lambda(\Gamma) = \overline{\Gamma.z} \cap \partial\mathbb{H}^2, \tag{51}$$

25. Dans le cas des variétés riemaniennes compactes, fermées, sans points conjugués, cet exposant δ coïncide avec l'entropie topologique h_{top} du flot géodésique, dans la situation ouverte, il va capturer l'entropie topologique de l'ensemble capté du flot géodésique.

où l'ensemble ne dépend pas du choix de z. Alors l'exposant δ s'interprète comme la dimension de Minkowski ou de Hausdorff de $\Lambda(\Gamma)$ en toute dimension comme prouvé par SULLIVAN (1979).

On a le théorème suivant qui exprime l'existence d'un trou spectral en fonction de l'exposant critique $\delta \in [0, 1)$

THÉORÈME 4.9 (PATTERSON (1976), SULLIVAN (1979), NAUD (2005))

Soit M une surface hyperbolique convexe cocompacte. Alors il résulte des travaux de PATTERSON (1976) et SULLIVAN (1979) que la fonction zêta de Selberg $Z_M(s)$ a un nombre fini de zéros à droite de $\Re(s) = \inf(\frac{1}{2}, \delta)$. Si $\delta < \frac{1}{2}$, on dira qu'il y a un trou spectral dans la bande verticale $\Re(s) \in [\delta, \frac{1}{2}]$.

NAUD (2005) montre que lorsque $\delta \in [0, \frac{1}{2}]$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que Z_M ait un nombre fini de zéros à droite de $\Re(s) = \delta - \varepsilon$ sauf en $s = \delta$ qui est un zéro simple.

La force du résultat de NAUD (2005) réside dans le fait qu'il donne un trou spectral dans la bande $\Re(s) \in [\delta - \varepsilon, \delta]$ valable même quand $\delta = \frac{1}{2}$ quand le résultat de Patterson–Sullivan ne donne plus d'information intéressante, cependant il restait à traiter le cas $\delta \in (\frac{1}{2}, 1]$. Le résultat de Bourgain–Dyatlov prouve l'existence du trou spectral **sans condition** sur l'exposant critique δ.

THÉORÈME 4.10 (BOURGAIN et DYATLOV, 2018). — *Toute surface convexe cocompacte a un trou spectral.*

4.3.4. *Chronologies des résultats.* — L'étude des résonances du laplacien avec des applications à la décroissance exponentielle des équations d'onde remonte au travaux de Lax–Phillips. Pour plus d'informations sur le lien entre résonances et théorie de la diffusion, on renvoie le lecteur au survol de NAUD (2015).

- Dans le cas du scattering par des obstacles, le trou spectral a été établi par IKAWA (1988) et étendu à des ensembles hyperboliques généraux par NONNENMACHER et ZWORSKI (2009a,b) où le trou spectral s'exprime en terme de la pression topologique de l'ensemble captif.
- Un trou spectral dans la bande $\Re(s) \in [\delta - \varepsilon, \frac{1}{2}], \varepsilon > 0$ sous la condition $\delta - \frac{1}{2} \leqslant 0$ a été prouvé par NAUD (2005) pour les surfaces convexes cocompactes en s'appuyant sur le travail de DOLGOPYAT (1998).
- Le travail de DYATLOV et ZAHL (2016) reformule le problème de trou spectral en termes de principe d'incertitude fractal et montre un trou spectral $\beta > \frac{1}{2} - \delta$ en introduisant pour la première fois dans le sujet des notions de **combinatoire additive**. Ce résultat n'est intéressant que dans le régime où δ est très proche ou bien égal à $\frac{1}{2}$. Signalons que les auteurs introduisent un calcul pseudodifférentiel exotique qui quantifie des symboles qui sont lisses le long d'un feuilletage et plus singulier dans des directions transverses. Ce calcul jouera un rôle crucial dans les travaux de BOURGAIN et DYATLOV (2017, 2018) et DYATLOV et JIN (2018b). Le travail DYATLOV et JIN (2018a) adapte les méthodes de DOLGOPYAT (1998), NAUD (2005) et STOYANOV (2011) dans le but d'améliorer la taille du trou spectral qui

décroît polynomialement en la constante de régularité C_R [26] alors que la méthode de Dyatlov–Zahl ne donne qu'une décroissance superpolynomiale en la constante de régularité C_R. Le travail de Bourgain et Dyatlov (2017) emploie le théorème somme-produit de Bourgain (2010) pour montrer que $\beta > \frac{1}{2} - \delta$ indépendamment de C_R. Ce résultat a aussi été prouvé indépendamment par Li (2018). Ces méthodes ont été récemment employées par Sahlsten et Stevens (2020) pour montrer un résultat général de décroissance de la transformée de Fourier des mesures de Gibbs associées à des applications expansives *non linéaires* [27] sur des Cantor.

— Dyatlov et Zworski (2020) reprouvent l'implication principe d'incertitude fractal $\Longrightarrow$ trou spectral sur les surfaces hyperboliques cocompactes sans passer par la machinerie de Dyatlov–Zahl mais en utilisant des méthodes d'opérateurs de transfert.

— Le travail Bourgain et Dyatlov (2018) prouve l'existence du trou spectral de façon inconditionnelle sur les surfaces convexes cocompactes et le résultat est intéressant dans le régime $\delta > \frac{1}{2}$ alors que le travail Bourgain et Dyatlov (2017) améliore le trou spectral de Patterson–Sullivan.

Dans le paragraphe 4.4 nous allons décrire de façon informelle la preuve du prolongement unique puis de façon très brève, nous discuterons au paragraphe 4.8 de la preuve du trou spectral.

4.4. Le prolongement unique des fonctions propres.

4.4.1. *Enoncé du problème et réduction préliminaire.* — Rappelons brièvement de quoi il s'agit. On a vu dans les sections 1 et 3 qu'étant donné un ensemble E avec de l'épaisseur et une fonction $u \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{u}$ est à support borné ou bien u quasianalytique, on a une estimée de la forme $\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C\|1_E u\|_{L^2(\mathbb{R})}$ où la constante C ne dépend que de l'épaisseur de l'ensemble E. Ici, il s'agit de prouver le même genre d'inégalités sauf que l'on travaille sur une surface hyperbolique M. La fonction u est une fonction propre du laplacien pour une grande valeur propre et au lieu de localiser par 1_E seulement en position, on va chercher à localiser dans l'espace des phases à l'aide d'un opérateur pseudodifférentiel $\mathrm{Op}_\hbar(a)$. On suppose que le symbole $a \in C_0^\infty(T^*M)$ ne s'annule pas sur le cotangent unitaire S^*M et s'annule près de la section nulle.

On aimerait montrer que pour tout $a \in C_0^\infty(T^*M)$ et $a|_{S^*M}$ n'est pas la fonction nulle, on a :

$$(\hbar^2\Delta_g - 1)u_\hbar = 0 \implies \|u_\hbar\|_{L^2(M)} \leqslant C\|\mathrm{Op}_\hbar(a)(u_\hbar)\|_{L^2(M)} \tag{52}$$

où la constante C ne dépend pas de $\hbar$ qui résulte du théorème 4.2 appliqué à une fonction propre $u_\hbar$. Dans le cadre de notre exposé et pour des raisons de simplicité, nous allons

26. Cette constante de régularité quantifie la δ- régularité d'Ahlfors–David de l'ensemble limite Λ_Γ, pour la mesure de Paterson–Sullivan μ. Pour tout intervalle I de longueur entre $(0,1]$, $\mu(I) \leqslant C_R|I|^\delta$.

27. Nous renvoyons le lecteur à l'introduction de l'article original pour des explications sur cette notion de non linéarité.

esquisser la preuve de l'inégalité affaiblie avec une perte en $|\log(\hbar)|$:

(53) $$(\hbar^2\Delta_g - 1)u_\hbar = 0 \implies \|u_\hbar\|_{L^2(M)} \leqslant C|\log(\hbar)|\|\operatorname{Op}_\hbar(a)(u_\hbar)\|_{L^2(M)}.$$

Cette borne est déjà une amélioration notable par rapport aux estimées de prolongement unique (45), car sans aucune hypothèse sur la métrique g, on aurait seulement : $\|u_\hbar\|_{L^2(M)} \leqslant Ce^{\frac{C}{\hbar}}\|\operatorname{Op}_\hbar(a)(u_\hbar)\|_{L^2(M)}$.

Un ingrédient important dans la preuve que nous emploierons de façon répétée est l'inégalité de contrôle, si $\operatorname{supp}(b) \subset \operatorname{supp}(a)$, alors on a :

(54) $$\|\operatorname{Op}_\hbar(b)u_\hbar\|_{L^2(M)} \lesssim \|\operatorname{Op}_\hbar(a)u_\hbar\|_{L^2(M)} + \mathcal{O}(\hbar)\|u_\hbar\|_{L^2(M)}.$$

On dira dans la suite que b est contrôlée par a [28]. L'estimée elliptique au dessus est une conséquence des propriétés algébriques de la quantification semiclassique.

Partons de $a \in C_0^\infty(T^*M)$, $a = 0$ près de la section nulle de T^*M et $a|_{S^*M}$ n'est pas la fonction nulle. Par les propriétés du calcul pseudodifférentiel, il est facile de montrer que si $b \in C_0^\infty(T^*M)$, $b = 0$ près de la section nulle et $a = b$ sur un voisinage de S^*M, alors $\|(\operatorname{Op}_\hbar(a) - \operatorname{Op}_\hbar(b))\, u_\hbar\|_{L^2(M)} = \mathcal{O}(\hbar^\infty)$. Donc les estimées ne dépendent que de la restriction de $a \in C_0^\infty(T^*M)$ à un voisinage de $S^*M \subset T^*M$ et l'estimée de prolongement unique $\|u_\hbar\| \leqslant C\|\operatorname{Op}_\hbar(a)u_\hbar\|$ ne dépend que du fait que a soit non nulle sur S^*M.

Donc on suppose sans perte de généralité que a est homogène de degré 0 dans un petit voisinage de S^*M et $a = 1$ sur un ouvert $U \subset S^*M$ où $U \subset S^*M$ est un ouvert quelconque non vide.

4.5. Construction d'une partition et étape de contrôle.

Etant donné deux opérateurs pseudodifférentiels semiclassiques, nous dirons que $A = B + \mathcal{O}(\hbar^\infty)$ près de S^*M si quel que soit $\chi \in C_0^\infty(T^*M)$ qui vaut 1 près de S^*M, on ait $(A - B)\operatorname{Op}_\hbar(\chi) = \mathcal{O}(\hbar^\infty)_{L^2\to L^2}$. Dans ce paragraphe, toutes les égalités que nous écrirons dans la suite sont à prendre au sens de "près de S^*M".

Soit $a_1, a_2 \in C_0^\infty(T^*M \setminus 0; [0,1])$ tels que $a_1|_{S^*M} = a|_{S^*M}$ et $a_1 + a_2 = 1$ sur S^*M (a_1 coïncide avec a seulement sur S^*M) et $\operatorname{supp}(a_2) \cap U = \emptyset$.

On suppose aussi que $a_1 + a_2 \leqslant 1$ partout. On définit les pseudodifférentiels $A_j = \operatorname{Op}_\hbar(a_j)$ tels que $A_1, A_2, A_1 + A_2$ sont tous des opérateurs bornés sur $L^2(M)$. On va choisir les quantifications de telle sorte que la somme $A_1 + A_2$ commute avec le laplacien et $A_1 + A_2 = Id + \mathcal{O}(\hbar^\infty)_{L^2\to L^2}$ près de S^*M, ce qui jouera un rôle crucial pour la suite [29]. Par construction de a_1, on sait que A_1 est contrôlé par $\operatorname{Op}_\hbar(a)$: $\|A_1u_\hbar\|_{L^2(M)} \leqslant \|\operatorname{Op}_\hbar(a)u_\hbar\|_{L^2(M)} + \mathcal{O}(\hbar)\|u_\hbar\|_{L^2(M)}$. Dans la suite étant donné un opérateur $B\colon L^2(M) \to L^2(M)$, nous dirons que B est contrôlé par a si $\|Bu_\hbar\|_{L^2(M)} \leqslant C\|\operatorname{Op}_\hbar(a)u_\hbar\|_{L^2(M)} +$

28. Attention, on voit dans le membre de droite une petite perte en $\mathcal{O}(\hbar)$.

29. Considérer une fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$ qui vaut 1 sur un voisinage de $1 \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ et s'annule près de $0 \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Choisir $a \in C^\infty(S^*M)$ telle que $a = 1$ sur $U \subset S^*M$ et s'annule en dehors d'un petit voisinage de U, puis étendre par homogénéité près de $S^*M \subset T^*M$ en posant $a_1(x;\xi) = a(x; \frac{\xi}{|\xi|})\chi(|\xi|^2)$. On posera $A_2 = \chi(\hbar^2\Delta) - \operatorname{Op}_\hbar(a_1)$ et A_1, A_2 satisfont bien les hypothèses demandées.

$\mathcal{O}(\hbar)\|u_\hbar\|_{L^2(M)}$ où la constante $C > 0$ ne dépend pas de $\hbar$ et donc de la suite de fonctions propres.

4.5.1. *Fonction propre et dynamique.* — C'est maintenant que l'on va utiliser le fait que $u_\hbar$ est une fonction propre, $(\hbar^2\Delta_g - 1)\,u_\hbar = 0$ et donc $u_\hbar$ se transforme simplement par la dynamique quantique $e^{it\sqrt{\Delta}}u_\hbar = e^{\frac{it}{\hbar}}u_\hbar$. En mécanique quantique, on peut choisir de propager les états (représentation de Schrödinger) ou bien propager les observables en les conjuguant par le propagateur (représentation de Heisenberg). Donc on va poser $A_1(t) = U(-t)A_1U(t)$, $U(t) = e^{-it\sqrt{\Delta_g}} \colon L^2(M) \to L^2(M)$, qui est la version de l'observable poussée par la dynamique quantique, et on a l'estimée :

$$\|A_1u_\hbar\|_{L^2(M)} = \|A_1(t)u_\hbar\|_{L^2(M)} \leqslant \|\operatorname{Op}_\hbar(a)u_\hbar\|_{L^2(M)} + \mathcal{O}(\hbar)\|u_\hbar\|_{L^2(M)}$$

donc $A_1(t)$ est contrôlé par $\operatorname{Op}_\hbar(a)$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$.

Par le théorème d'Egorov, $A_1(t) = \operatorname{Op}_\hbar(a_1 \circ \varphi^t) + \mathcal{O}(\hbar)_{L^2\to L^2}$ pour des temps $|t| \leqslant T$. C'est pourquoi $\|\operatorname{Op}_\hbar(a_1 \circ \varphi^t)u_\hbar\|_{L^2(M)}$ est contrôlée sur des temps finis.

Si jamais l'ensemble $U \subset S^*M$ satisfait la condition de contrôle géométrique, ce qui veut dire que **toute géodésique intersecte U au bout d'un temps T** pour un certain $T > 0$, alors on peut montrer facilement que

$$\tilde{a} = \int_0^T a \circ \varphi^t dt > 0 \text{ sur } S^*M,$$

ce qui permet de contrôler le terme $\|\operatorname{Op}(\tilde{a})\,u\|_{L^2(M)}$.

4.5.2. *Propagation en temps long et calcul anisotrope.* — Malheureusement pour nous, beaucoup d'ensembles $U \subset S^*M$ très gros ne satisfont pas la condition de contrôle géométrique car ils ratent trop de géodésiques périodiques. Dans ce cas, on va devoir appliquer le théorème d'Egorov en temps long, ce qui va poser des petits problèmes comme je vais expliquer ci dessous.

L'idée est effectivement d'appliquer Egorov à un moment mais pour optimiser l'argument, il faut aller à des échelles de temps où Egorov et la composition ne sont plus valables. En allant à ces échelles très longues de l'ordre de $\rho|\log(\hbar)|$ où $\rho < 1$, on va tomber sur des opérateurs qui sortent du calcul pseudodifférentiel usuel mais dont on sait encore décrire le noyau et dont on pourra estimer la norme grâce au principe d'incertitude fractal. Le problème, c'est que lorsque t (resp. $-t$) devient grand, le symbole tiré en arrière par le flot $a_2 \circ \varphi^t$ va perdre de la régularité transversalement aux directions stables (resp. instables) à cause de l'hyperbolicité de φ^t. Intuitivement, chaque dérivée de $a_2 \circ \varphi^t$ fait apparaître un facteur $e^{|t|}$, si $|t|$ est trop grand on risque de sortir de la classe des symboles semiclassiques traditionnels, ce qui explique pourquoi le théorème n'est valable que sur des échelles de temps courtes. De façon intuitive, une des idées importantes de Dyatlov et Zahl (2016) utilisée dans le papier de Dyatlov et Jin (2018b) consiste à aller le plus loin possible dans la correspondance classique-quantique. Ceci les pousse donc à développer un calcul pseudodifférentiel anisotrope où le théorème d'Egorov est valable jusqu'à des temps essentiellement optimaux à savoir $\rho|\log h|$ avec $\rho < 1$.

Cependant ce calcul contient deux classes de pseudodifférentiels $\mathrm{Op}_\hbar^{L_{s/u}}$ selon que l'on considère des temps t très positifs/négatifs. Ces classes sont adaptées au feuilletage stable/instable faibles et permettent d'atteindre ces temps. Un point clef est qu'à un moment de la preuve, nous aurons besoin considérer d'estimer la norme de la composée $\mathrm{Op}_\hbar^{L_s}(a_+)\,\mathrm{Op}_\hbar^{L_u}(a_-)$ de deux tels opérateurs. Mais comme les opérateurs vivent dans des calculs différents qui sont "incompatibles", les règles du calcul pseudodifférentiel usuel ne s'appliquent plus pour contrôler la norme de ce produit d'opérateur et c'est là que le principe d'incertitude fractal va entrer en jeu pour exploiter la porosité du support des symboles $a_\pm$.

L'une des difficultés est de prouver que les bonnes propriétés d'un calcul sont conservées : un symbole borné se quantifie en un opérateur borné dans L^2, une bonne notion de composition, une identitée de commutateurs, une forme du théorème d'Egorov comme expliqué dans le paragraphe 4.2.1.

Si M est une surface hyperbolique, le tangent du fibré cotangent $T\,(T^*M)$ admet un repère mobile H_p, U_+, U_-, D où H_p est le générateur du flot géodésique, $U_\pm$ sont les champs de vecteurs horocycliques Dyatlov, Faure et Guillarmou (2015, paragraphe 2A, p. 930 et 3B, p. 934) et enfin D est le générateur des dilatations dans les fibres de T^*M. Si on se restreint au niveau $\{p = 1\} = S^*M$ alors les champs $H_p, U_\pm$ engendrent un repère mobile de $T\,(S^*M)$.

Une propriété importante du repère H_p, U_+, U_-, D concerne la croissance des dérivées du symbole composé $(a_i \circ \varphi^t)_{i\in\{1,2\}}$ pour des grands temps. En fait, les dérivées $H_p(a_i\circ\varphi^t)$, $D(a_i \circ \varphi^t)$, $U_\pm(a_i \circ \varphi^{\pm t})$ pour $i = 1, 2$, sont bornées uniformément quand $t \geqslant 0$. Alors que les dérivées $U_\pm(a_i \circ \varphi^{\mp t})_{i=1,2}$ sont à croissance exponentielle quand $t \geqslant 0$, de l'ordre de $\mathcal{O}(e^t)$ comme on travaille en courbure -1.

Pour pouvoir appliquer le théorème d'Egorov sur des temps suffisamment longs, les articles s'appuient sur un calcul anisotrope construit en détail dans Dyatlov et Zahl (2016), nous allons donner une définition informelle des symboles dans ce calcul :

Définition 4.11. — *Soit $\mathcal{L}$ un feuilletage lagrangien de T^*M. Un symbole $b(\hbar, .) \in C^\infty(T^*M), \forall \hbar \in (0, 1]$ sera dit anisotrope si :*

1. *b est à support compact et bornée indépendamment de $\hbar$*
2. *b est lisse le long des feuilles du feuilletage $\mathcal{L}$ uniformément en $\hbar \in (0, 1]$. Si $Y_1, \ldots, Y_m$, $Z_1, \ldots, Z_k$ sont des champs de vecteurs dans T^*M où les Y_i sont tangents au feuilletage $\mathcal{L}$, les Z_i sont transverses à $\mathcal{L}$, on a une estimée du type*
$$\sup |Y_1, \ldots, Y_m Z_1, \ldots, Z_k b| \leqslant C\hbar^{-\rho k-\varepsilon}.$$

Le facteur $0 \leqslant \rho < 1$ est très important car il mesure la perte de régularité lorsqu'on dérive le symbole dans des directions transverses au feuilletage.

Dans ce calcul exotique, les symboles sont lisses le long de feuilletages lagrangiens et d'une certaine façon on est aux limites du calcul pseudodifférentiel. De plus, remarquons qu'il y a ici aussi une sorte de principe d'incertitude car si on était régulier dans *trop peu* *de directions*, on n'aurait pas assez de degrés de liberté pour faire des intégrations par parties et avoir un bon calcul symbolique. Comme promis, dans ce calcul exotique, on a une version améliorée du théorème d'Egorov pour des temps $|t| \leqslant \rho|\log(\hbar)|, \rho \in [0,1)$ où $A_i(t) = e^{it\sqrt{\Delta_g}} A_i e^{-it\sqrt{\Delta_g}}$, $i = 1, 2$:

$$A_i(t) = \mathrm{Op}_\hbar^{L_s}\left(a_i \circ \varphi^t\right) + \mathcal{O}(\hbar^{1-\rho-})_{L^2 \to L^2}, t \in [0, \rho|\log(\hbar)|]$$
$$A_i(t) = \mathrm{Op}_\hbar^{L_u}\left(a_i \circ \varphi^t\right) + \mathcal{O}(\hbar^{1-\rho-})_{L^2 \to L^2}, t \in [-\rho|\log(\hbar)|, 0]$$

où le terme d'erreur est en $\mathcal{O}(\hbar^{1-\rho-})_{L^2 \to L^2}$ au lieu du $\mathcal{O}(\hbar)_{L^2 \to L^2}$ dans le théorème d'Egorov usuel.

Enfin, pour mettre en oeuvre ce calcul, il est crucial que les feuilletages stables et instables faibles soient lisses ce qui impose la courbure à être négative constante. En courbure négative variable, il faut recourir à de nouvelles idées décrites dans Dyatlov, Jin et Nonnenmacher (2019) pour pallier l'absence d'un tel calcul exotique.

4.6. Lien avec l'ergodicité quantique et entropies quantiques.

L'idée générale des preuves d'Anantharaman (2008), Anantharaman et Nonnenmacher (2007) sur l'entropie des mesures semiclassiques et du travail de Dyatlov–Jin est d'utiliser des versions quantiques de méthodes de recouvrements adaptés à la dynamique du flot géodésique : les **partitions quantiques**. Pour expliquer l'idée derrière cette notion, nous allons faire une courte digression sur l'entropie topologique et comment elle se calcule à l'aide de bons recouvrements.

4.6.1. *Entropie topologique et boules de Bowen.* — En systèmes dynamiques, étant donné une application continue $f\colon X \to X$ où X est un espace métrique compact, on va définir les boules de Bowen $B_{n,\varepsilon}(x)$ comme l'ensemble des y tels que $\sup_{0 \leqslant k \leqslant n} \mathbf{dist}\left(f^k(y), f^k(x)\right) \leqslant \varepsilon$, les orbites de longueur n partant d'une boule de Bowen sont ε proches tout le long de la trajectoire. On peut définir les boules de Bowen d'une autre façon qui fera le lien de façon plus claire avec la partie quantique :

$$B_{n,\varepsilon}(x) = \cap_{k=0}^{n} f^{-k}\left(B_{f^k(x)}(\varepsilon)\right) \tag{55}$$

comme **intersection** de n préimages par la dynamique de boules de rayon ε. Ensuite à (ε, n) fixés, on va choisir un nombre minimal $N(n,\varepsilon)$ de boules de Bowen pour recouvrir un ensemble compact K inclus dans X et on retrouve l'entropie topologique de K suivant Katok et Hasselblatt (1997, p. 108–109) [30] :

$$h_{top} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \overline{\lim} \frac{1}{n} \log N(n,\varepsilon).$$

30. Noter la ressemblance frappante entre cette définition de h_{top} et la dimension de Minkowski, dans les deux cas on considère des asymptotiques de log du nombre d'éléments d'un recouvrement. Nous renvoyons le lecteur au superbe ouvrage de Pesin (2008) pour une vue d'ensemble sur ces liens.

4.6.2. *Partitions quantiques dans la situation de Dyatlov–Jin.* — Dans le problème qui nous intéresse, rappelons que l'on veut montrer une estimée de type :

$$\|u_\hbar\|_{L^2(M)} \leqslant C|\log(\hbar)|\|\operatorname{Op}_\hbar(a)u_\hbar\|_{L^2(M)}.$$

On décompose S^*M en deux parties avec la partition de l'unité à deux éléments $a_1 + a_2 = 1 \in C^\infty(S^*M)$ où $U \subset \operatorname{supp}(a_1|_{S^*M})$ et $a_2|_U = 0$. À cette partition de l'unité de S^*M, on associe une *partition quantique* en posant $A_i = \operatorname{Op}_\hbar(a_i), i = 1, 2$, de telle sorte que $A_1 + A_2 = Id + \mathcal{O}(\hbar^\infty)_{L^2\to L^2}$ près de S^*M. Comme dans la construction des boules de Bowen pour définir l'entropie topologique, on va raffiner cette partition de l'unité en employant la dynamique. En représentation de Heisenberg, on considère le projecteur *propagé par la dynamique quantique* : $A_i(t) = e^{it\sqrt{\Delta}}A_ie^{-it\sqrt{\Delta}}$ à des temps de l'ordre de $\rho\log(\hbar^{-1})$ [31], qui sont a priori plus longs que le temps d'Ehrenfest usuel $\frac{1}{2}\log(\hbar^{-1})$ au delà duquel le théorème d'Egorov usuel n'est plus valable. Le calcul anisotrope $\operatorname{Op}_\hbar^{L_{s/u}}$ permet toutefois de pousser le théorème d'Egorov dans une classe de symboles exotiques jusqu'au temps $\pm t = \rho\log(\hbar^{-1}) > \frac{1}{2}\log(\hbar^{-1})$ où on rappelle qu'il y a un calcul différent $\operatorname{Op}_\hbar^{L_s}$ ou $\operatorname{Op}_\hbar^{L_u}$ selon que t ou $-t$ devient grand.

On rappelle que la somme $A_1 + A_2$ commute au laplacien Δ_g donc on en déduit que $A_1(t) + A_2(t) = e^{it\sqrt{\Delta}}(A_1 + A_2)e^{-it\sqrt{\Delta}} = (A_1 + A_2) = Id + \mathcal{O}(\hbar^\infty)_{L^2\to L^2}$ près de S^*M. On observe que $(Id + \mathcal{O}(\hbar^\infty)_{L^2\to L^2})^N = Id + \mathcal{O}(\hbar^\infty)_{L^2\to L^2}$ près de S^*M donc on peut écrire :

$$Id + \mathcal{O}(\hbar^\infty)_{L^2\to L^2} = (A_1 + A_2)^{N+1} = \prod_{t=0}^{N}(A_1(t) + A_2(t))$$

$$Id + \mathcal{O}(\hbar^\infty)_{L^2\to L^2} = (A_1 + A_2)^{N+1} = \prod_{t=-N}^{0}(A_1(t) + A_2(t))$$

en représentation de Heisenberg. Pour l'instant, on n'a pas encore utilisé le théorème d'Egorov. Au lieu d'intersecter n itérés par le flot géodésique de n boules unités, on a exprimé Id comme la composée de N partitions de l'unité propagées par la dynamique quantique.

Si on développe le produit $\prod_{t=N}^{0}(A_1(t)+A_2(t)) = (A_1(N)+A_2(N))\dots(A_1(0)+A_2(0))$ à partir du terme de gauche vers la droite [32], il y a toujours un premier instant où l'on rencontre A_1 donc on peut faire les regroupements suivants :

$$\prod_{t=N}^{0}(A_1(t) + A_2(t)) =$$

$$\underbrace{\prod_{t=N}^{0} A_2(t)}_{\text{pas de } A_1} + \underbrace{A_1(N)\prod_{t=N-1}^{0}(A_1(t) + A_2(t))}_{A_1 \text{ première position}} + \underbrace{A_2(N)A_1(N-1)\prod_{t=N-2}^{0}(A_1(t) + A_2(t))}_{A_2 \text{ deuxième position}} + \cdots$$

31. où $\rho < 1$ sera ajusté à la fin de l'argument.

32. penser que ce sont des opérateurs donc l'ordre compte et donc les développements se font de gauche à droite ou de droite à gauche en gardant les sens de composition des opérateurs.

En utilisant de nouveau le fait que $A_1(t)+A_2(t)=e^{it\sqrt{\Delta}}(A_1+A_2)e^{-it\sqrt{\Delta}}=(A_1+A_2)$, on obtient une identité combinatoire :

$$Id+\mathcal{O}(\hbar^\infty)=\prod_{t=0}^{N}A_2(\pm t)+\sum_{p=0}^{N}A_2(\pm N)\cdots A_2(\pm(p+2))A_1(\pm(p+1))(A_1+A_2)^p.$$

Ce qu'il faut bien garder en tête, c'est que sur les fonctions propres, $A_1(t)$ est contrôlé pour tout $t\in\mathbb{R}$ par $\mathrm{Op}_\hbar(a)$ au sens où $(\hbar^2\Delta-Id)\,u_\hbar=0 \implies \|A_1(t)u_\hbar\|_{L^2(M)}\leqslant C\|\mathrm{Op}_\hbar(a)u_\hbar\|_{L^2(M)}+\mathcal{O}(\hbar)\|u_\hbar\|_{L^2(M)},\forall t\in\mathbb{R}$ d'où l'on déduit que pour tout p, on a l'inégalité :

$$\begin{aligned}&\|A_2(\pm N)\cdots A_2(\pm(p+2))A_1(\pm(p+1))(A_1+A_2)^p u_\hbar\|_{L^2(M)}\\&\qquad=\|A_2(\pm N)\cdots A_2(\pm(p+2))A_1(\pm(p+1))u_\hbar\|_{L^2(M)}+\mathcal{O}(\hbar^\infty)\\&\qquad\qquad\leqslant\|\prod_{t=0}^{p}A_2(\pm t)\|_{L^2\to L^2}C\|\mathrm{Op}_\hbar(a)u_\hbar\|_{L^2(M)}\leqslant C'\|\mathrm{Op}_\hbar(a)u_\hbar\|_{L^2(M)}\end{aligned}$$

où chaque terme $\prod_{t=0}^{p}A_2(\pm t)A_1(\pm(p+1))(A_1+A_2)^p$ pour lequel A_1 apparaît au moins une fois est contrôlé par $\mathrm{Op}_\hbar(a)$. Un petit commentaire : les produits $A_2(\pm N)\cdots A_2(\pm(p+2))A_1(\pm(p+1))$ sont les versions quantiques des boules de Bowen pour le flot futur/passé puisque qu'on a par le théorème d'Egorov appliqué au calcul anisotrope pour des temps allant jusqu'à $\rho|\log(\hbar)|$:

$$\begin{aligned}&A_2(\pm N)\cdots A_2(\pm(p+2))A_1(\pm(p+1))\simeq\\&\qquad\qquad\mathrm{Op}_\hbar^{L_{s/u}}\left(a_1\circ\varphi^{\pm(p+1)}a_2\circ\varphi^{\pm(p+2)}\cdots a_2\circ\varphi^{\pm N}\right)+\mathcal{O}(\hbar^{1-\rho-})_{L^2\to L^2}\end{aligned}$$

où le terme $a_1\circ\varphi^{\pm(p+1)}a_2\circ\varphi^{\pm(p+2)}\cdots a_2\circ\varphi^{\pm N}$ est porté par l'intersection de n itérés de la partition par le flot, un peu à la manière des boules de Bowen. Posons $A_X^\pm=\prod_{t=0}^{N}A_2(\pm t)$, $A_Y^\pm=\sum_{p=0}^{N}A_2(\pm N)\dots A_2(\pm(p+2))A_1(\pm(p+1))(A_1+A_2)^p$, les calculs au dessus peuvent se résumer en une simple identité :

$$Id+\mathcal{O}(\hbar^\infty)=\underbrace{A_Y^+A_Y^-+A_X^+A_Y^-+A_Y^+A_X^-}_{\text{somme de termes contrôlés}}+A_X^+A_X^-$$

d'où en sommant sur les $p=0,\dots,N$ ce qui fait à peu près $|\log(\hbar)|$ termes, on obtient :

$$\|u-A_X^+A_X^-u\|_{L^2(M)}\leqslant C|\log(\hbar)|\|\mathrm{Op}_\hbar(a)u\|_{L^2(M)}+\mathcal{O}(\hbar^{1-\rho-}).$$

Maintenant une conséquence du principe d'incertitude fractal et du théorème d'Egorov appliqué séparément à A_X^+ et A_X^- dans leur calculs anisotropes respectifs, c'est qu'on va pouvoir montrer la décroissance en norme d'opérateurs du terme croisé $A_X^+A_X^-$ qui ne contient que des termes en A_2. On a $\|A_X^+A_X^-\|_{L^2\to L^2}=\|\mathrm{Op}_\hbar^{L_s}\left(\prod_{t=0}^{N}a_2\circ\varphi^t\right)\mathrm{Op}_\hbar^{L_u}\left(\prod_{t=0}^{N}a_2\circ\varphi^{-t}\right)\|_{L^2\to L^2}$ par Egorov dans le calcul anisotrope et où $\varphi^t\colon T^*M\to T^*M$ est un flot homogène de degré 0 qui coïncide avec le flot géodésique sur S^*M. On va donc être amené à prouver par le principe d'incertitude fractal que :

$$\| \operatorname{Op}_\hbar^{L_s} \left(\prod_{t=0}^{N} a_2 \circ \varphi^t \right) \operatorname{Op}_\hbar^{L_u} \left(\prod_{t=0}^{N} a_2 \circ \varphi^{-t} \right) \|_{L^2 \to L^2} \leqslant C\hbar^\beta. \tag{56}$$

Si on admet (56) alors on a montré l'inégalité (53) ce qui conclut la version faible de l'inégalité de prolongement unique.

Pour améliorer la borne de façon à éliminer le terme en $|\log(\hbar)|$, c'est à dire démontrer (52) plutôt que (53), nous renvoyons le lecteur à l'article original de Dyatlov–Jin qui emploie des idées combinatoires dont un argument sous-additif qui remonte aux travaux de Anantharaman (2008). Nous renvoyons le lecteur aux articles originaux pour plus de détails et une exposition de ces méthodes sous-additives. L'objectif du paragraphe suivant est d'esquisser la preuve de l'estimée (56) en la réduisant au principe d'incertitude fractal sur $\mathbb{R}$.

4.7. Étape de réduction du microlocal au principe d'incertitude fractal.

Dans les travaux de Bourgain et Dyatlov (2018), Dyatlov et Jin (2018b), Dyatlov, Jin et Nonnenmacher (2019) et Dyatlov et Zahl (2016), les auteurs ont constamment besoin de flexibiliser la notion de principe d'incertitude fractal originalement prouvée pour les fonctions dans $\mathbb{R}$ et pour ceci, ils font un usage intensif d'opérateurs intégraux de Fourier.

Dans cette partie, nous allons chercher à expliquer comment ramener une estimation sur la norme d'opérateur $\| \operatorname{Op}_\hbar^{L_s} \left(\prod_{t=0}^{N} a_2 \circ \varphi^t \right) \operatorname{Op}_\hbar^{L_u} \left(\prod_{t=0}^{N} a_2 \circ \varphi^{-t} \right) \|_{L^2 \to L^2}$ au principe d'incertitude fractal qui est une estimée sur des fonctions de la droite réelle. On pose $a_\pm = \prod_{t=0}^{N} a_2 \circ \varphi^{\pm t}$ et on va d'abord montrer la porosité du support de $a_\pm$.

L'idée est de paramétrer les variétés stables et instables à l'aide des générateurs des flots horocycliques. Par exemple, la variété instable (resp. stable) passant par $(x;\xi)$ est la courbe intégrale $s \in \mathbb{R} \mapsto e^{sU_-}(x;\xi)$ (resp. $s \in \mathbb{R} \mapsto e^{sU_+}(x;\xi)$) et on va pouvoir lire la porosité en terme des $s \in \mathbb{R}$ qui paramétrise l'arc instable (resp. stable).

Lemme 4.12 (Porosité du support). — *Il existe $\nu > 0$, $C_0 > 0$ dépendant de M, U tels que pour tout $(x;\xi) \in T^*M \setminus \{0\}$, les ensembles*

$$\Omega_\pm(x;\xi) = \{s \in \mathbb{R}; \exp(sU_\pm)(x;\xi) \in \mathit{supp}(a_\pm)\} \subset \mathbb{R}$$

sont ν-poreux sur une échelle $[C_0 h^\rho, 1]$.

Une remarque, si a_2 a un petit support, cette propriété est presque évidente car le support de a_+ sera en fait un petit disque de taille h^ρ dans la direction stable. C'est vraiment le point nouveau par rapport aux travaux précédents sur le sujet à savoir d'être capable de traiter de gros sous-ensemble non contrôlés. On rappelle que le facteur $\rho < 1$ fixe l'échelle de temps $\rho|\log(\hbar)|$ sur lequel on regarde la dynamique.

Démonstration. — Nous allons seulement esquisser la preuve en renvoyant aux articles originaux pour plus de détails. L'idée de la preuve repose sur le lien entre flot horocyclique et géodésique comme me l'a expliqué Gabriel Rivière.

On va travailler sur a_-, le raisonnement est le même avec a_+ par symétrie. On part de a_2 supportée dans le complémentaire de U. Le pull-back $a_2 \circ \varphi^{-t}$ va se concentrer quand t grandit vers une fonction supportée très près d'un grand nombre de feuilles instables mais réparties de manière fractale.

Donc c'est la trace de $\prod_{t=0}^{N} a_2 \circ \varphi^{-t}$, $N \sim \rho|\log(\hbar)|$ que l'on doit prendre sur les variétés stables et qui aura les propriétés de porosité. Rappelons que le flot horocyclique est uniquement ergodique, ce résultat est dû à Furstenberg (1973) en courbure négative constante et Marcus (1975) en courbure négative variable. Par conséquent, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall f \in C^0(S^*M)$, il existe un temps T assez grand tel que :

$$\forall (x;\xi) \in S^*M, |\frac{1}{T}\int_0^T f \circ e^{-tU_+}(x;\xi)dt - \int_M f d\mu| \leqslant \varepsilon \tag{57}$$

où μ est la mesure de Liouville qui est l'unique mesure invariante par e^{tU_+} en courbure négative constante.

L'important c'est que la borne est uniforme sur $(x;\xi)$ et T ne dépend pas de $(x;\xi) \in S^*M$. Si on prend f une fonction proche de l'indicatrice de l'ouvert U, on peut en déduire qu'il existe un temps T fixé, tel que tout arc d'horocycle de longueur T passant pas n'importe quel $(x;\xi) \in S^*M$ passe un temps au moins $(\mu(U) - \varepsilon)T$ dans U où ε est arbitrairement petit quitte à choisir T assez grand. Donc il existe $\nu > 0$ tel que tout horocycle de taille T a un bout de longueur $10\nu T$ contenu dans U [33]. Donc pour tout intervalle $\tilde{I} \subset \mathbb{R}$ de longueur comprise entre T et $10T$, pour tout $(x;\xi) \in S^*M$, il y a toujours un sous intervalle $\tilde{J} \subset \tilde{I}$ de longueur $|\tilde{J}| = \nu|\tilde{I}|$ tel que l'arc $e^{\tilde{J}U_+}(x;\xi) \subset U$.

Rappelons que le support de a_2 ne rencontre pas U donc $\mathrm{supp}(a_2 \circ \varphi^{-j}) \cap \varphi^j(U) = \emptyset$ et comme $a_+ = \prod_{j=0}^{N}(a_2 \circ \varphi^{-j})$ on a $\mathrm{supp}(a_+) \cap \varphi^j(U) = \emptyset, \forall 0 \leqslant j \leqslant N$. Maintenant si on fait la restriction de a_+ à un arc d'horocycle quelconque $e^{IU_+}(x;\xi)$, $T \leqslant |I| \leqslant 10T$, on observe que $a_+|_{e^{IU_+}(x;\xi)}$ s'annule sur l'intersection $e^{IU_+}(x;\xi) \cap \varphi^j(U), \forall 0 \leqslant j \leqslant N$.

Prenons un élément $(x;\xi) \in S^*M$ et $I \subset \Omega_+(x;\xi)$ pour $|I| \in [C_0\hbar^\rho, 1]$, on choisit $C_0 = 10T$. Il faut montrer qu'il existe un bout d'intervalle J, $|J| = \nu|I|$ tel que $J \cap \Omega_+(x;\xi) = \emptyset$ ce qui prouverait la porosité. C'est là qu'on utilise la relation entre flot géodésique et flot horocyclique. On choisit $0 \leqslant j \leqslant N$ tel que $e^j|I| \in [T, 10T]$, puis on observe que

$$\{s | e^{sU_+}(x;\xi) \in \varphi^j(U)\} = \{s | \varphi^{-j}\left(e^{sU_+}(x;\xi)\right) \in U\}$$

puis on utilise la relation

$$\varphi^{-j}\left(e^{sU_+}(x;\xi)\right) = e^{e^j s U_+}\left(\varphi^{-j}(x;\xi)\right)$$

pour en déduire l'existence d'un intervalle $\tilde{J} \subset I$, $|\tilde{J}| = \nu|I|$ tel que $e^{e^j\tilde{J}U_+}(\varphi^{-j}(x;\xi)) \subset U \implies e^{\tilde{J}U_+}(x;\xi) \subset \varphi^j(U) \implies e^{\tilde{J}U_+}(x;\xi) \cap \mathrm{supp}(a_+) = \emptyset$ et $\tilde{J} \cap \Omega_+(x;\xi) = \emptyset$. □

33. Sinon il existerait une suite $(x_n;\xi_n)$ telle que l'horocycle $e^{[0,T]U_+}(x_n;\xi_n)$ ne reste que pendant des temps $\leqslant \frac{1}{n}$ dans l'ouvert U et on aboutit à une contradiction en passant à la limite.

Quitte à décomposer $a_\pm$ en plusieurs morceaux avec des partitions de l'unité de S^*M, on peut se ramener grâce au lemme précédent au cas où :

— $a_\pm|_{S^*M}$ est supportée dans un petit ouvert $V \subset S^*M$,

— il existe des fonctions lisses $\psi_{u/s} \colon V \to \mathbb{R}$ dont les niveaux $\psi_{u/s} =$ constante déterminent les feuilles instables/stables,

— les images directes $\psi_{u/s*}a_\mp \in C^\infty(\mathbb{R})$ sont des fonctions à une variable dont le support est ν-poreux sur une échelle $[C_0\hbar^\rho, 1]$.

En gros, a^+ et a^- sont à support poreux dans les directions instables et stables respectivement. S'il existait un symplectomorphisme $\Phi \colon T^*M \to T^*(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1)$ qui était capable de **redresser simultanément** les feuilletages stables et instables de T^*M en des feuilletages lagrangiens horizontaux et verticaux de $T^*(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1)$ alors en quantifiant ce symplectomorphisme par un opérateur intégral de Fourier approprié, on se ramènerait au principe d'incertitude fractal sur $\mathbb{R}$. Cette approche ne peut pas se faire car il n'existe pas de symplectomorphisme [34] qui redresserait **simultanément** les deux feuilletages lagrangiens $L_{u/s}$ en feuilletage vertical et horizontal, donc pour se ramener au principe d'incertitude fractal sur $\mathbb{R}$, il va falloir localiser puis travailler avec des opérateurs assez généraux que nous introduisons dans la suite. On renvoie le lecteur à l'article de Dyatlov et Zahl (2016, section 4.4) pour une discussion précise de cette étape cruciale de réduction.

4.7.1. *Le principe d'incertitude fractal avec phase générale.* — Pour appliquer le principe d'incertitude fractal à des problèmes concrets d'analyse géométrique, on a besoin de l'étendre à des opérateurs intégraux de Fourier $\mathcal{B}_\hbar \colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ avec phase générale et symbole en cherchant à se ramener au principe d'incertitude fractal sur $\mathbb{R}$. La généralisation se fait en trois étapes :

1. Déjà en autorisant des fractales non bornées mais en faisant des restrictions à des intervalles bornés.
2. Puis en autorisant des opérateurs obtenus en insérant des amplitudes dans la transformée de Fourier, pour $b \in C_0^\infty(T^*\mathbb{R})$:
$$\mathcal{B}_\hbar(f)(x) = \hbar^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{2i\pi x\xi}{\hbar}} b(x;\xi) f(\xi) d\xi.$$
3. Enfin en autorisant de prendre des phases générales, auquel cas l'opérateur prend la forme générale :
$$\mathcal{B}_\hbar(f)(x) = \hbar^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i\Phi(x,y)}{\hbar}} b(x,y) f(y) dy$$
où pour un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, la phase $\Phi \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, $b \in C_0^\infty(U)$ et $\partial^2_{xy}\Phi \neq 0$ sur U.

Les opérateurs de la forme $\mathcal{B}$ sont des opérateurs intégraux de Fourier qui quantifient un symplectomorphisme (appelé relation canonique de l'intégral de Fourier)

$$\Psi \colon (y;\eta) \mapsto (x;\xi) = \Psi(y;\eta) \tag{58}$$

34. Même localement.

où $\xi = \partial_x \Phi(x,y)$ et $\eta = -\partial_y \Phi(x,y)$.

Exemple 4.13 (Fourier quantifie Legendre). — De la même manière, on peut interpréter la transformée de Fourier comme un opérateur intégral de Fourier qui quantifie la transformée de Legendre $(y;\eta) \mapsto (-\eta; y)$.

Esquissons la preuve du principe d'incertitude fractal avec phase générale. Commençons par garder la phase de la transformée de Fourier $x.y$ mais avec un symbole $b(x,y)$ donc $\mathcal{B}_\hbar(f)(x) = \hbar^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{2i\pi xy}{\hbar}} b(x,y) f(y) dy$. On veut montrer que $\|1_X \mathcal{B}_\hbar 1_Y\|_{L^2\to L^2} = \mathcal{O}(\hbar^\beta)$ où (X,Y) sont ν-poreux sur une échelle $[\hbar, 1]$, on décompose le terme à majorer comme une somme

$$\|1_X \mathcal{B}_\hbar 1_Y\|_{L^2\to L^2} \leqslant \underbrace{\|1_X \mathcal{F}_\hbar 1_{Y(\hbar^\rho)^c} \mathcal{F}_\hbar^{-1} \mathcal{B}_\hbar 1_Y\|_{L^2\to L^2}} + \|1_X \mathcal{F}_\hbar 1_{Y(\hbar^\rho)} \mathcal{F}_\hbar^{-1} \mathcal{B}_\hbar 1_Y\|_{L^2\to L^2}$$

où on va montrer que le terme souligné est un $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ ce qui implique que l'opérateur $\mathcal{F}_\hbar^{-1}\mathcal{B}_\hbar 1_Y f$ est localisée près du voisinage $Y(\hbar^\rho)$ pour $\rho \in (0,1)$. On considère $\mathcal{F}_\hbar^{-1}\mathcal{B}_\hbar$ qui a un noyau intégral $K(x,y) = (2\pi\hbar)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)w/\hbar} b(w,y) dw$. Des intégrations par parties répétées montrent que $|K(x,y)| \leqslant C_N \hbar^{-1} \left(1 + \frac{|x-y|}{\hbar}\right)^{-N}$ donc on a une estimée de la forme $\|1_{\mathbb{R}\setminus Y(\hbar^\rho)} \mathcal{F}_\hbar^{-1} \mathcal{B}_\hbar 1_Y\|_{L^2\to L^2} \leqslant C_N \hbar^N$. On en déduit une suite d'inégalités :

$$\begin{aligned}\|1_X \mathcal{B}_\hbar 1_Y\|_{L^2\to L^2} &= \|1_X \mathcal{F}_\hbar \mathcal{F}_\hbar^{-1} \mathcal{B}_\hbar 1_Y\|_{L^2\to L^2} \lesssim \|1_X \mathcal{F}_\hbar 1_{Y(\hbar^\rho)} \mathcal{F}_\hbar^{-1} \mathcal{B}_\hbar 1_Y\|_{L^2\to L^2} \\ &\lesssim \|1_X \mathcal{F}_\hbar 1_{Y(\hbar^\rho)}\|_{L^2\to L^2} \underbrace{\|\mathcal{F}_\hbar^{-1} \mathcal{B}_\hbar 1_Y\|_{L^2\to L^2}}\end{aligned}$$

où on contrôle le terme souligné par une constante [35] et on est ramené à l'étude de $\|1_X \mathcal{F}_\hbar 1_{Y(\hbar^\rho)}\|_{L^2\to L^2}$. Si on avait $\rho = 1$ alors on serait ramené au principe d'incertitude fractal qui concerne $1_X \mathcal{F}_\hbar 1_Y$ où les deux ensembles (X,Y) sont poreux sur une **même échelle** $[\hbar, 1]$. Malheureusement ici $\rho < 1$ et donc on ne peut pas conclure directement que $\|1_X \mathcal{F}_\hbar 1_{Y(\hbar^\rho)}\|_{L^2\to L^2} = \mathcal{O}(\hbar^\beta)$, $\beta > 0$. Le problème, c'est que l'ensemble $Y(\hbar^\rho)$ est ν-poreux sur une échelle $(\hbar^\rho, 1]$ où $\hbar^\rho > \hbar$ donc $Y(\hbar^\rho)$ est un ensemble plus grossier que le Y de départ. L'idée est donc d'appliquer le principe d'incertitude fractal à approximativement $\hbar^{\rho-1}$ copies de translatées de l'ensemble $Y(\hbar)$ recouvrant $Y(\hbar^\rho)$, ce qui va borner le terme $\|1_X \mathcal{B}_\hbar 1_Y\|_{L^2\to L^2}$ par $C\hbar^{\beta+\rho-1}$ où le facteur $\hbar^{\rho-1}$ quantifie cette petite perte mais quitte à choisir ρ assez proche de 1, on aura toujours de la décroissance quand $\hbar \to 0$. Maintenant, considérons $\mathcal{B}_\hbar = \hbar^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i\Phi(x,y)}{\hbar}} b(x,y) f(y) dy$ avec une phase Φ générale et rappelons qu'on cherche à majorer $\|1_X \mathcal{B}_\hbar 1_Y\|_{L^2\to L^2}$. On remplace 1_X par une régularisation χ de la fonction indicatrice supportée sur un $\hbar^{\frac{\rho}{2}}$-voisinage de X, on se ramène à montrer que $\|\chi \mathcal{B}_\hbar 1_Y\|_{L^2\to L^2} \leqslant C\hbar^\beta$. On décompose l'ensemble Y comme une union disjointe de paquets Y_j de taille $\hbar^{\frac{1}{2}} \gg \hbar$, $Y = \cup_j Y_j$, $1_X \mathcal{B}_\hbar 1_Y = \sum_j 1_X \mathcal{B}_\hbar 1_{Y_j}$ où on a écrit $1_X \mathcal{B}_\hbar 1_Y$ comme une somme d'opérateurs $\left(\chi \mathcal{B}_\hbar 1_{Y_j}\right)_j$

35. Remarquer que $\mathcal{F}_\hbar^{-1}\mathcal{B}_\hbar$ est un pseudodifférentiel semiclassique d'ordre 0 donc définit un opérateur borné dans L^2.

qui sont deux à deux presques orthogonaux [36]. Ensuite par le théorème de Cotlar–Stein [37] (voir Zworski, 2012), on est ramené à montrer que $\|\chi\mathcal{B}_\hbar 1_{Y_j}\|_{L^2\to L^2} \leqslant C\hbar^\beta$. Supposons pour simplifier que $Y_j = Y\cap[0,\hbar^{\frac{1}{2}}]$, alors en composant $\mathcal{B}_\hbar$ avec l'isométrie : $T_\hbar\colon f\in L^2(\mathbb{R})\mapsto \hbar^{\frac{1}{4}}f(\hbar^{-\frac{1}{2}}.)\in L^2(\mathbb{R})$, on obtient un nouvel opérateur remis à l'échelle qui s'écrit

$$\tilde{\mathcal{B}_\hbar} = \hbar^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i\Phi(x,\sqrt{\hbar}y)}{\hbar}} b(x,\sqrt{\hbar}y)f(y)dy.$$

On se ramène à montrer que

$$\|\chi\tilde{\mathcal{B}_\hbar}1_{\hbar^{-\frac{1}{2}}Y\cap[0,1]}\|_{L^2\to L^2} \leqslant C\hbar^\beta.$$

L'idée principale pour conclure est de faire un développement de Taylor de la phase en y de façon à la **linéariser** : $\Phi(x,\sqrt{\hbar}y) = \Phi(x,0)+\sqrt{\hbar}y\partial_y\Phi(x,0)+\mathcal{O}(\hbar)$ donc

$$\begin{aligned}&\|\chi\tilde{\mathcal{B}_\hbar}1_{\hbar^{-\frac{1}{2}}Y\cap[0,1]}\|_{L^2\to L^2}\\ &\leqslant \sup_{\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}=1}\|1_{X_{\hbar^{\frac{\rho}{2}}}}\hbar^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{iy\partial_y\Phi(x,0)}{\sqrt{\hbar}}}\mathcal{O}(1)b(x,\sqrt{\hbar}y)1_{\hbar^{-\frac{1}{2}}Y\cap[0,1]}(y)f(y)dy\|_{L^2_x(\mathbb{R})}\leqslant C\hbar^\beta.\end{aligned}$$

On conclut en faisant un changement de variable $\partial_y\Phi(x,0)\mapsto -x$ (qui est un difféomorphisme à cause de l'hypothèse $\partial^2_{xy}\Phi|_U\neq 0$ sur la phase Φ) et en appliquant le principe d'incertitude fractal sur $\mathbb{R}$ avec phase quadratique et avec amplitude, $\hbar$ est remplacé par $\sqrt{\hbar}$ et où l'ensemble Y en position (resp. X en moment) devient $\hbar^{-\frac{1}{2}}Y\cap[0,1]$ (resp. l'image de $X_{\hbar^{\frac{\rho}{2}}}$ par le difféomorphisme $x\mapsto\partial_y\Phi(x,0)$).

principe d'incertitude fractal pour les ensembles limites hyperboliques. — Dans Dyatlov et Jin (2018b, section 5.2 p. 324) et aussi dans Dyatlov et Zahl (2016, section 4.4), en utilisant des calculs en géométrie hyperbolique et en conjuguant par les bons symplectomorphismes, les auteurs ramènent le problème de majorer $\|\operatorname{Op}_\hbar^{L_s}\left(\prod_{t=0}^N a_2\circ\varphi^t\right)\operatorname{Op}_\hbar^{L_u}\left(\prod_{t=0}^N a_2\circ\varphi^{-t}\right)\|_{L^2\to L^2}$ (voir l'équation (56)) au FUP hyperbolique qui est un cas particulier de principe d'incertitude fractal avec symbole et phase générale comme décrit plus haut. En particulier, on introduit l'opérateur :

$$\mathcal{B}_\chi f(y) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{S}^1}|y-y'|^{\frac{2i}{\hbar}}\chi(y,y')f(y')dy' \tag{59}$$

où $\chi=0$ près de la diagonale $\{y=y'\}\subset\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$. Il faut penser à $\mathcal{B}_\chi$ comme une version hyperbolique de la transformée de Fourier semiclassique et aussi comme à un opérateur intégral de Fourier qui va mettre sous forme normale les feuilletages stables et instables. Dans le formalisme précédent, la phase générale est $2\log(|y-y'|)$ et le symbole est la fonction $\chi(y,y')$. Donc l'étude précédente nous montre que l'estimée (56) est une conséquence du :

36. C'est pour avoir cette propriété de presque orthogonalité qu'il a fallu régulariser l'indicatrice 1_X en χ pour pouvoir faire des intégrations par parties avec χ.

37. Soit $(T_j)_j$ une famille d'opérateurs bornés de $L^2\to L^2$ tels que $\sup_j\sum_k\|T_j^*T_k\|^{\frac{1}{2}}_{L^2\to L^2}\leqslant C$ et $\sup_j\sum_k\|T_jT_k^*\|^{\frac{1}{2}}_{L^2\to L^2}\leqslant C$ alors $\sum T_j$ converge et $\|\sum T_j\|_{L^2\to L^2}\leqslant C$.

THÉORÈME 4.14 (BOURGAIN et DYATLOV, 2018). — *Soit M une surface hyperbolique, convexe cocompacte et $\Lambda(\hbar^\rho)$ le $\hbar^\rho$-voisinage de l'ensemble limite $\Lambda \subset \mathbb{S}^1$.*

Il existe $\beta > 0$, $\rho \in (0,1)$ dépendant seulement de M tels que $\forall \chi \in C^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \setminus \Delta)$ et $\hbar \in (0,1)$

$$\|1_{\Lambda_\Gamma(\hbar^\rho)} \mathcal{B}_\chi 1_{\Lambda_\Gamma(\hbar^\rho)}\|_{L^2(\mathbb{S}^1) \to L^2(\mathbb{S}^1)} \leqslant C\hbar^\beta \tag{60}$$

où la constante C dépend de M, χ et non de $\hbar$.

4.8. Trou spectral pour la fonction zêta de Selberg.

Ce dernier paragraphe repose sur les travaux de DYATLOV et ZAHL (2016) qui ont montré pour la première fois comment ramener la preuve du trou spectral au principe d'incertitude fractal en employant des méthodes sophistiquées de théorie du scattering et analyse microlocale. La preuve de trou spectral pour la fonction zêta de Selberg repose sur l'identification des zéros de $Z(s)$ dans la région $\Re(s) \leqslant \frac{1}{2}$ avec les résonances de l'opérateur de Laplace–Beltrami Δ_g. La notion de résonance provient de la théorie de la diffusion et elle décrit des taux de décroissance exponentielle des solutions de l'équation d'onde automorphe dans le système ouvert M [38]. Rappelons le strict nécessaire pour comprendre le contexte géométrique du problème. Dans une variété hyperbolique, convexe cocompacte M, l'ensemble capté du flot géodésique dans S^*M est hyperbolique. Soit $\Gamma_\pm \subset T^*M$ les espaces stables et instables de l'ensemble captif du flot géodésique [39] :

$$\Gamma_\pm = \{(x;\xi) | \varphi^t(x;\xi) \text{ ne s'échappe pas à l'infini quand } t \to \pm\infty\}.$$

Précisons que les ensembles Γ_+ et Γ_- sont feuilletés par les feuilletages instable et stable faibles du flot géodésique $\varphi^t \colon S^*M \to S^*M$.

Physiquement, le régime des hautes fréquences est gouverné par les trajectoires piégées. Les ondes qui vivent longtemps doivent se localiser près des géodésiques qui ne s'échappent pas à l'infini. Mathématiquement, les résonances (ou les zéros de Z_M) sont des pôles de la résolvante $(\Delta_g - s(1-s))^{-1} : C_0^\infty(M) \to C^\infty(M)$. Pour montrer le trou spectral pour Z_M, on est réduit à prouver que si u, $\|u\|_{L^2(M)} = 1$ est un état résonant tel que :

$$\left(\Delta_g - \frac{1}{4} - \lambda^2\right) u = 0, u \text{ sortante, } \mathrm{Im}(\lambda) > -\beta, \Re(\lambda) \gg 1 \implies u = 0$$

où un état résonant sortant est intuitivement une fonction C^∞ qui est microlocalisée près de l'ensemble stable Γ_+ de l'ensemble captif.

Ce qui veut dire que pour les grandes parties imaginaires, le laplacien Δ_g n'a pas de résonances. Rappelons la relation entre la variable λ du problème de scattering et le s

38. Sous des bonnes hypothèses de décroissance de la résolvante.
39. En général, l'ensemble captif est fractal et sa dimension de Minkowski vaut $2\delta + 1$ où δ est l'exposant critique de l'ensemble limite.

de la fonction zêta : $s = \frac{1}{2} - i\lambda$ donc les grandes parties réelles de λ vont correspondre à des grandes parties imaginaires de s. On reformule le problème de façon semiclassique :

$$\left(\hbar^2 \Delta_g - \frac{\hbar^2}{4} - \omega^2\right) u = 0, u \text{ sortante}$$
$$\mathrm{Im}(\omega) > -\beta\hbar, \Re(\omega) = 1, 0 < \hbar \ll 1 \implies u = 0.$$

L'idée est similaire à la preuve de prolongement unique sauf que l'on travaille sur des variétés non compactes. Soit $\chi_\pm \in C^\infty(T^*M)$ des symboles portés par un (e^{-t})-voisinage des ensembles $\Gamma_\pm$ où le temps t va dépendre de $\hbar$. La solution u est sortante si $u = e^{i\lambda t} e^{it\sqrt{\Delta_g - \frac{1}{4}}} u$ et si u est microsupportée près de Γ_+, ce qui s'écrit $u = \mathrm{Op}_\hbar(\chi_+) u + \mathcal{O}(\hbar^\infty)$ et aussi u doit avoir de la masse L^2 près de Γ_-, ce qui se traduit par l'estimation $\| \mathrm{Op}_\hbar(\chi_-) u\|_{L^2} \geqslant C^{-1}$. Observons que l'état résonant u peut être propagé par $e^{it\sqrt{\Delta_g - \frac{1}{4}}}$ sans modifier sa norme L^2. En utilisant des estimées de propagation des singularités de Vasy (2013) jusqu'au temps $\rho|\log(\hbar)|$ où $\rho \in (0,1)$ (c'est à ce moment qu'on utilise l'hypothèse $\Re(\lambda)$ grand), on montre les bornes :

$$\| \left(1 - \mathrm{Op}_\hbar^{L_u}(\chi_+)\right) u\|_{L^2} = \mathcal{O}(\hbar^\infty)$$
$$\| \mathrm{Op}_\hbar^{L_s}(\chi_-) u\|_{L^2} \geqslant C^{-1} e^{-\mathrm{Im}(\omega) t} = C^{-1} \hbar^{\rho \mathrm{Im}(\omega)}$$

où $\left(\hbar^2 \Delta_g - \frac{\hbar^2}{4} - \omega^2\right) u = 0$, $L_{u/s}$ sont les feuilletages instable, stable faibles du flot géodésique et on prend des quantifications dans le calcul anisotrope au sens du paragraphe 4.5.2. Pour aboutir à une contradiction de la même manière que pour les fonctions propres, il suffit de montrer que

$$\| \mathrm{Op}_\hbar^{L_s}(\chi_-) \, \mathrm{Op}_\hbar^{L_u}(\chi_+) \|_{L^2 \to L^2} \leqslant C\hbar^\beta \tag{61}$$

ce qui contredit $\hbar^{\rho\beta} \ll C^{-1} \hbar^{\rho \mathrm{Im}(\omega)} \leqslant \| \mathrm{Op}_\hbar^{L_s}(\chi_-) u\|_{L^2}$ car sinon on aurait $\hbar^{\rho\beta} \ll C\hbar^\beta$ ce qui est absurde.

La preuve de l'estimée (61) découle du principe d'incertitude fractal hyperbolique décrit dans le théorème 4.14 du paragraphe 4.7.1. Ce qui conclut la preuve du trou spectral.

RÉFÉRENCES

Nalini Anantharaman (2008). « Entropy and the localization of eigenfunctions », *Annals of Mathematics* **168** (2), p. 435-475.

Nalini Anantharaman, Herbert Koch et Stéphane Nonnenmacher (2009). « Entropy of eigenfunctions », in : *New Trends in Mathematical Physics*. Springer, p. 1-22.

Nalini Anantharaman et Stéphane Nonnenmacher (2007). « Half-delocalization of eigenfunctions for the Laplacian on an Anosov manifold », **57** (7), p. 2465-2523.

Arne Beurling et Paul Malliavin (1962). « On Fourier transforms of measures with compact support », *Acta Mathematica* **107** (3-4), p. 291-309.

David Borthwick (2007). *Spectral theory of infinite-area hyperbolic surfaces*. Springer.

Jean Bourgain (2010). « The discretized sum-product and projection theorems », *Journal d'Analyse Mathématique* **112** (1), p. 193-236.

Jean Bourgain et Semyon Dyatlov (2017). « Fourier dimension and spectral gaps for hyperbolic surfaces », *Geometric and Functional Analysis* **27** (4), p. 744-771.

——— (2018). « Spectral gaps without the pressure condition », *Annals of Mathematics* **187** (3), p. 825-867.

Laura Cladek et Terence Tao (2020). « Additive energy of regular measures in one and higher dimensions, and the fractional uncertainty principle », *arXiv preprint arXiv :2012.02747*.

PJ Cohen (1968). « A simple proof of the Denjoy-Carleman theorem », *The American Mathematical Monthly* **75** (1), p. 26-31.

Yves Colin De Verdière (1985). « Ergodicité et fonctions propres du laplacien », *Communications in Mathematical Physics* **102** (3), p. 497-502.

——— (2007). « Entropy and semi-classics », *SÉMINAIRE BOURBAKI* **2006**.

Dmitry Dolgopyat (1998). « On decay of correlations in Anosov flows », *Annals of mathematics* **147** (2), p. 357-390.

Harold Donnelly et Charles Fefferman (1988). « Nodal sets of eigenfunctions on Reimannian manifolds », *Inventiones mathematicae* **93** (1), p. 161-183.

Semyon Dyatlov (2017). « Control of eigenfunctions on hyperbolic surfaces : an application of fractal uncertainty principle », *Journées équations aux dérivées partielles*, p. 1-14.

——— (2019). « An introduction to fractal uncertainty principle », *Journal of Mathematical Physics* **60** (8), p. 081505.

Semyon Dyatlov, Frédéric Faure et Colin Guillarmou (2015). « Power spectrum of the geodesic flow on hyperbolic manifolds », *Analysis & PDE* **8** (4), p. 923-1000.

Semyon Dyatlov et Long Jin (2017). « Resonances for open quantum maps and a fractal uncertainty principle », *Communications in Mathematical Physics* **354** (1), p. 269-316.

——— (2018a). « Dolgopyat's method and the fractal uncertainty principle », *Analysis & PDE* **11** (6), p. 1457-1485.

——— (2018b). « Semiclassical measures on hyperbolic surfaces have full support », *Acta Mathematica* **220** (2), p. 297-339.

Semyon Dyatlov, Long Jin et Stéphane Nonnenmacher (2019). « Control of eigenfunctions on surfaces of variable curvature », *à paraître à Journal of the American Mathematical Society*.

Semyon Dyatlov et Joshua Zahl (2016). « Spectral gaps, additive energy, and a fractal uncertainty principle », *Geometric and Functional Analysis* **26** (4), p. 1011-1094.

Semyon Dyatlov et Maciej Zworski (2020). « Fractal uncertainty for transfer operators », *International Mathematics Research Notices* **2020** (3), p. 781-812.

Harry FURSTENBERG (1973). « The unique ergodigity of the horocycle flow », in : *Recent advances in topological dynamics*. Springer, p. 95-115.

Patrick GÉRARD (1991). « Microlocal defect measures », *Communications in Partial differential equations* **16** (11), p. 1761-1794.

Sébastien GOUËZEL (2019). « Méthodes entropiques pour les convolutions de Bernoulli », *Asterisque* **414**, p. 251-288.

Colin GUILLARMOU (2005). « Meromorphic properties of the resolvent on asymptotically hyperbolic manifolds », *Duke Mathematical Journal* **129** (1), p. 1-37.

Laurent GUILLOPÉ et Maciej ZWORSKI (1997). « Scattering asymptotics for Riemann surfaces », *Annals of mathematics*, p. 597-660.

Rui HAN et Wilhelm SCHLAG (2020). « A higher-dimensional Bourgain–Dyatlov fractal uncertainty principle », *Analysis & PDE* **13** (3), p. 813-863.

Lars HÖRMANDER (2007). *The analysis of linear partial differential operators I : Distribution Theory and Fourier Analysis*. Springer.

Mitsuru IKAWA (1988). « Decay of solutions of the wave equation in the exterior of several convex bodies ». In : *Annales de l'institut Fourier*. T. 38. 2, p. 113-146.

Benjamin JAYE et Mishko MITKOVSKI (2018). « Quantitative uniqueness properties for L^2 functions with fast decaying, or sparsely supported, Fourier transform », *à paraître à Int. Math. Res. Notices*.

David JERISON et Gilles LEBEAU (1999). « Nodal sets of sums of eigenfunctions », *Harmonic analysis and partial differential equations (Chicago, IL, 1996), Chicago Lectures in Math*, p. 223-239.

Long JIN et Ruixiang ZHANG (2019). « Fractal uncertainty principle with explicit exponent », *Mathematische Annalen*, p. 1-27.

Anatole KATOK et Boris HASSELBLATT (1997). *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. 54. Cambridge university press.

Vincent LAFFORGUE (2009). « Propriété (T) renforcée banachique et transformation de Fourier rapide », *Journal of Topology and Analysis* **1** (03), p. 191-206.

Peter D LAX et Ralph S PHILLIPS (2016). *Scattering Theory : Pure and Applied Mathematics, Vol. 26*. T. 26. Elsevier.

Gilles LEBEAU et Enrique ZUAZUA (1998). « Null-Controllability of a System of Linear Thermoelasticity », *Archive for rational mechanics and analysis* **141** (4), p. 297-329.

Jialun LI (2018). « Decrease of Fourier coefficients of stationary measures », *Mathematische Annalen* **372** (3), p. 1189-1238.

Jialun LI, Frédéric NAUD, Wenyu PAN et al. (2021). « Kleinian Schottky groups, Patterson–Sullivan measures, and Fourier decay », *Duke Mathematical Journal*.

Elon LINDENSTRAUSS (2006). « Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity », *Annals of Mathematics*, p. 165-219.

Pierre-Louis LIONS et Thierry PAUL (1993). « Sur les mesures de Wigner », *Revista matemática iberoamericana* **9** (3), p. 553-618.

Alexander LOGUNOV et Eugenia MALINNIKOVA (2018). « Quantitative propagation of smallness for solutions of elliptic equations ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de.* T. 2. World Scientific, p. 2357-2378.

VN LOGVINENKO et Ju F SEREDA (1974). « Equivalent norms in spaces of entire functions of exponential type », *Teor. FunkciiFunkcional. Anal. i Prilozen. Vyp* **20**, p. 102-111.

Brian MARCUS (1975). « Unique ergodicity of the horocycle flow : variable negative curvature case », *Israel Journal of Mathematics* **21** (2), p. 133-144.

Rafe R MAZZEO et Richard B MELROSE (1987). « Meromorphic extension of the resolvent on complete spaces with asymptotically constant negative curvature », *Journal of Functional analysis* **75** (2), p. 260-310.

Yves MEYER (1998). *Wavelets, vibrations and scalings.* 9. American Mathematical Soc.

Camil MUSCALU et Wilhelm SCHLAG (2013). *Classical and Multilinear Harmonic Analysis : Volume 1.* T. 137. Cambridge University Press.

Frédéric NAUD (2005). « Expanding maps on Cantor sets and analytic continuation of zeta functions », **38** (1), p. 116-153.

——— (2015). « Bornes de Weyl fractales et résonances », *Séminaire BOURBAKI*, 68ème.

Stéphane NONNENMACHER et Maciej ZWORSKI (2009a). « Quantum decay rates in chaotic scattering », *Acta mathematica* **203** (2), p. 149-233.

——— (2009b). « Semiclassical resolvent estimates in chaotic scattering », *Applied Mathematics Research eXpress* **2009** (1), p. 74-86.

Samuel J PATTERSON (1976). « The limit set of a Fuchsian group », *Acta mathematica* **136** (1), p. 241-273.

Yakov B PESIN (2008). *Dimension theory in dynamical systems : contemporary views and applications.* University of Chicago Press.

Gabriel RIVIÈRE (2010). « Entropy of semiclassical measures in dimension 2 », *Duke Mathematical Journal* **155** (2), p. 271-335.

Zeév RUDNICK et Peter SARNAK (1994). « The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds », *Communications in Mathematical Physics* **161** (1), p. 195-213.

Tuomas SAHLSTEN et Connor STEVENS (2020). « Fourier transform and expanding maps on Cantor sets », *arXiv preprint arXiv :2009.01703.*

Nir SCHWARTZ (2021). « The full delocalization of eigenstates for the quantized cat map », *arXiv preprint arXiv :2103.06633.*

Alexander I SHNIRELMAN (1974a). « Ergodic properties of eigenfunctions », *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* **29** (6), p. 181-182.

——— (1974b). « Statistical properties of eigenfunctions », *Materials of the All-Union Mathematical School in Dilizhan [in Russian], Erevan*, p. 267-278.

Luchezar STOYANOV (2011). « Spectra of Ruelle transfer operators for axiom A flows », *Nonlinearity* **24** (4), p. 1089.

Dennis Sullivan (1979). « The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions », *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* **50** (1), p. 171-202.

Luc Tartar (1990). « H-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations », *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics* **115** (3-4), p. 193-230.

Claude Tricot (1999). *Courbes et dimension fractale.* Springer Science & Business Media.

András Vasy (2013). « Microlocal analysis of asymptotically hyperbolic and Kerr-de Sitter spaces (with an appendix by Semyon Dyatlov) », *Inventiones mathematicae* **194** (2), p. 381-513.

Steven Zelditch (1987). « Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces », *Duke mathematical journal* **55** (4), p. 919-941.

Maciej Zworski (2012). *Semiclassical analysis.* T. 138. American Mathematical Soc.

Nguyen Viet Dang

Institut Camille Jordan
43 boulevard du 11 Novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex France
E-mail : `dang@math.univ-lyon1.fr`