Séries numériques.

Exercice 1 : Calculer la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)} \qquad \sum_{n\geq 3}\frac{2n-1}{n(n^2-4)}$$

Exercice 2 : En utilisant l'identité $\dfrac{1}{3n+1}=\displaystyle\int_0^1 t^{3n}\,dt$, montrez que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 3 : En utilisant l'identité $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, montrez que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$$

est convergente, et calculez sa somme.

Exercice 4 : On se propose dans cet exercice de démontrer la formule de Bailey, Borwein et Plouffe, qui permet de calculer un chiffre du developpement hexadécimal de π sans calculer tous les chiffres précédents. Les formules de ce type sont faciles à vérifier. La difficulté est de les obtenir.

1. En utilisant l'identité $\frac{1}{\alpha}=\int_0^1 t^{\alpha-1}dt$ $(\alpha\neq 1)$, montrer que pour tout entier $p\geq 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{8n+p}\frac{1}{16^n}=\int_0^1\frac{t^{p-1}}{1-\frac{t^8}{16}}.$$

2. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{8n+1}-\frac{2}{8n+4}-\frac{1}{8n+5}-\frac{1}{8n+6}\right)\frac{1}{16^n}=\int_0^1\frac{4-2t^3-t^4-t^5}{1-\frac{t^8}{16}}dt.$$

3. Montrer que

$$\frac{4-2t^3-t^4-t^5}{1-\frac{t^8}{16}}=\frac{16(t-1)}{t^4-2t^3+4t-4}$$

Vérifier que $t^4-2t^3+4t-4=(t^2-2)(t^2-2t+2)$, et montrer que

$$\pi=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{8n+1}-\frac{2}{8n+4}-\frac{1}{8n+5}-\frac{1}{8n+6}\right)\frac{1}{16^n}.$$

Exercice 5 : 1) Appliquer la formule de Taylor Lagrange à la fonction exponentielle entre 0 et 1. En déduire que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{n!} \cdots$$

2) Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ (on écrira $n^2 = n(n-1) + n$).

3) Montrer que le reste d'ordre n de la série exponentielle, $R_n = \sum_{k>n} \frac{1}{k!}$, est majoré par $\dfrac{1}{nn!}$. En déduire que e est un nombre irrationnel.

Exercice 6 : Donner la dérivée d'ordre n de la fonction logarithme. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à cette fonction, montrer que la série harmonique alternée

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} \cdots$$

est convergente de somme $\ln 2$.

Retrouver ce résultat en utilisant la méthode présentée dans l'exercice 2, c'est à dire en remplaçant $1/n$ par $\int_0^1 t^{n-1} dt$.

Exercice 7 : 1) En comparant la somme partielle d'ordre n de la série harmonique

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

à une intégrale montrer que H_n vérifie l'encadrement

$$\ln(n+1) < H_n < 1 + \ln(n)$$

2) En déduire que la série harmonique est divergente et que H_n est équivalent lorsque n tend vers l'infini à $\ln n$.

Exercice 8 : 1) Calculer une primitive de $1/(x \ln^2 x)$.

2) En déduire que l'intégrale impropre $\int_a^{\infty} dx/x \ln^2 x$ est convergente $(a > 1)$.

3) Soit la série de terme général

$$u_n = 1/(n \ln^2 n) \qquad\qquad n \geq 2$$

et soit S_n la somme partielle d'ordre n, $S_n = \sum_{k=2}^{k=n} u_k$. Donner un majorant de S_n ; en déduire que la série des u_n est convergente. Soit S la somme de cette série.

4) Soit R_n le reste d'ordre n c'est à dire $R_n = \sum_{k=n+1}^{k=\infty} u_k$. Donner un encadrement de R_n.

5) Calculer un encadrement de R_{20} et une valeur approchée de S_{20}; en déduire un encadrement de S.

6) Montrer que pour que la somme S_n approche S de moins de 0.01 il faut que n soit supérieur à 10^{43}.

Exercice 9 : Soit f une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^2}$.

Exercice 10 : En utilisant les divers critères de convergence préciser la nature des séries dont le terme général u_n est donné par l'une des expressions suivantes :

$\dfrac{1}{\ln n}$	$\dfrac{1}{(\ln n)^{(\ln n)}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$
$\dfrac{(\ln n)^n}{n!}$	$\dfrac{1}{n^{2-\cos\frac{1}{n}}}$	$\dfrac{\sqrt{n(n-1)}}{n^2-2\sqrt{n}+3\ln n}$
$\dfrac{\sin(n)}{n(n+1)}$	$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{1+\sqrt{t}}dt$	$\displaystyle\int_0^{1} \frac{t^n}{1+\sqrt{t}}dt$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$	$\dfrac{2^n+3^n}{n^2+\ln n+5^n}$	$e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
$\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt{n^2-1}$	$\dfrac{(n+1)!}{1.4.\ldots(3n+1)}a^n$	$\dfrac{n!}{n^n}$
$\left(1+\dfrac{(-1)^n}{2}\right)a^n$	$\left(\dfrac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}$	$\mathrm{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$
$\mathrm{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{n}\right)$	$\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{2n\ln n}$	$\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$
$\dfrac{2.4.6\ldots 2n}{n^n}$	$\dfrac{\ln 2+\ln 3+\cdots\ln n}{n^\alpha}$	$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1/2}}$

Exercice 11 : Etudier la convergence simple et absolue des séries de terme général u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n^3+1}} \qquad u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$$

$$u_n = \frac{1}{(-1)^n n^2+n+1} \qquad u_n = \frac{n^2}{(1+i)^n}$$

$$u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad u_n = \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$$

$$u_n = (-1)^n\left(\sqrt{1+n}-\sqrt{n}\right) \qquad u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$u_n = \left(\frac{2n(1+i)+3}{3n-i}\right)^n \qquad u_n = (-1)^n \int_0^1 t^n f(t)\,dt \text{ avec } f \in C\left([0,1]\right), \mathbb{R}).$$

Exercice 12 : Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}$. En déduire que deux séries de termes généraux équivalents ne sont pas nécessairement de même nature.

Exercice 13 : Discuter selon les valeurs de $\alpha > 0$ la convergence simple et absolue de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}.$$

Exercice 14 : Discuter la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\ln n}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

selon la valeur du nombre complexe z.

Exercice 15 : Etudier la nature des séries :

$$u_n = \frac{\cos n}{n+\cos n} \qquad u_n = \frac{\cos n}{n^{1/2}+\cos n}$$

On pourra songer à utiliser la méthode de somation d'Abel, et, au besoin, utiliser un développement limité.

Exercice 16 : Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(\ln n)}{n}$ est divergente.

Indication : la divergence provient de ce que le numérateur n'oscille pas assez vite autour de 0. Montrer qu'il existe, aussi loin que l'on veut, des intervalles de grandes longueurs sur lesquels la minoration suivante est vérifiée :

$$\frac{\sin \ln n}{n} \geq \frac{1}{2n}.$$

Exercice 17 : Discuter selon la valeur de α la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^{\alpha} \sin^2 x}$

On pourra d'abord calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{n\pi-\pi/2}^{n\pi+\pi/2} \frac{dx}{1 + a \sin^2 x}$ avec $a > 0$.

Suites et séries de fonctions.

Exercice 18 : Etudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (f_n) dans chacun des cas suivants :

1. $f_n(x) = e^x + \dfrac{\sin nx}{n + e^x}$
2. $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$

Dans le deuxième cas étudier aussi la convergence uniforme sur un segment borné $[a\,,b]$.

Exercice 19 : Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_n$ définie par

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^2}$$

1. Sur l'intervalle $[0\,,+\infty[$.
2. Sur l'intervalle $[a\,,+\infty[$. $\quad (a > 0)$

Exercice 20 : Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x^2}$$

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Montrer qu'elle est uniformément convergente sur tout segment borné $[a\,,b]$.
3. Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $[a\,,+\infty[$.
4. Calculer la limite, lorsque $n \to \infty$ de $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

Exercice 21 : Que peut–on dire d'un polynôme borné sur $\mathbb{R}$? En déduire que la limite d'une suite de fonctions polynômes uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ est encore une fonction polynôme .

Exercice 22 : Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^2 \sin\frac{1}{nx} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \textit{et } f_n(0) = 0$$

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Montrer qu'elle converge uniformément sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'elle n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23 : Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = (x^3 + 1)\frac{ne^x + x^{-x}}{n + x}$$

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Montrer que cette suite est uniformément convergente.
3. En déduire $\lim_{n\to\infty} I_n$ avec $I_n = \displaystyle\int_0^1 (x^3+1)\frac{ne^x + x^{-x}}{n+x}$

Exercice 24 : Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+2^n n x^2}$

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$ et $\lim_{n\to\infty} I_n$. En déduire que la suite $(f_n)_n$ n'est pas uniformément convergente sur [0,1].
3. Donner une démonstration directe de ce que la suite $(f_n)_n$ n'est pas uniformément convergente sur [0,1]

Exercice 25 : Donner un exemple d'une suite de fonctions continues $(f_n)_n$ définies sur [0,1], convergeant simplement vers la fonction nulle, telle que
$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \infty$.

Exercice 26 : Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où u_n est définie sur $\mathbb{R}$ par $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2+x^2+1}$, est simplement convergente, et que sa somme est continue.

Exercice 27 : Étudier la convergence simple, la convergence normale, et enfin la convergence uniforme de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$, sur $]1, +\infty[$ et sur $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.
2. $u_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2}$, sur $[0, +\infty[$ et sur $[0, a]$.
3. $u_n(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{n^2+x^2}$, sur $[0, +\infty[$.

Exercice 28 : Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où

$$u_n(x) = \log\frac{n}{1+n} + \frac{1}{x+n}$$

converge sur $[0, +\infty[$ vers une fonction de classe C^1 dont la dérivée est < 0.

Exercice 29 : Donner un exemple simple d'une série de fonctions qui est uniformément convergente, sans être normalement convergente (on pourra penser à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, en tout x donné, il existe au plus une valeur de n telle que $u_n(x) \neq 0$).

Exercice 30 : On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ avec $u_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$ pour $x \in [0\,, +\infty[$.

1. Etudier la convergence simple de cette série.
2. Montrer qu'elle n'est pas normalement convergente.
3. Donner un majorant du reste d'ordre n, $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x)$ et en déduire qu'elle est uniformément convergente.

Exercice 31 : Soit (λ_n) une suite croissante de réels strictement positifs telle que $\lim(\lambda_n) = +\infty$. On considère la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ avec $u_n(x) = (-1)^n e^{-\lambda_n x}$.

1. Etudier la convergence simple de cette série.
2. Pour tout $x > 0$ on note $S(x)$ la somme de cette série. Monter que $0 \leq S(x) \leq e^{-\lambda_0 x}$.
3. Soit $R_n(x) = \sum_{k>n} u_k(x)$ le reste d'ordre n de cette série. Montrer que pour $x > 0$ on a $|R_n(x)| \leq e^{-\lambda_{n+1} x}$. Quel est le signe de $R_n(x)$?
4. En déduire que pour tout $a > 0$ la série $\sum u_n$ est uniformément convergente sur $[a. + \infty[$ et que sa somme est continue sur $]0\,, +\infty[$.

Exercice 32 : Soit α un réel positif. On considère la suit u_n de fonctions définies par

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^\alpha e^{-nx} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

1) Démontrer que la série des u_n converge simplement et calculer sa somme.

2) Démontrer que cette série converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.

3) Etudier selon les valeurs de α la convergence uniforme de cette série sur $[0, +\infty[$.

Exercice 33 : Soit la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n}\dfrac{x^n}{1+x}$, définies sur $[0, 1]$.

1. Montrer que cette série est simplement convergente.
2. Majorer le reste d'ordre $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x)$ par le théorème des séries alternées.
3. En déduire que la série converge uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 34 : Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ avec $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \arctan \dfrac{x}{\sqrt{n}}$.
Montrer que cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction impaire continue et bornée.

Exercice 35 :

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} u_n$, où $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n} + \cos(nx)}$, converge uniformément sur tout intervalle $[\alpha, \pi - \alpha]$, avec $0 < \alpha < \pi/2$.
2. En minorant la somme $\sum_{k=n}^{2n-1} u_k(\pi/4n)$, montrer que cette série n'est pas uniformément convergente sur $[0, \pi/2]$.

Séries entières.

Exercice 36 : Calculer le rayon de convergence et la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n$ (pour le calcul de la somme on écrira $n^2 = n(n-1)$ et on mettra x^2 en facteur).

Exercice 37 : Rayon de convergence des séries entières

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) n^\alpha z^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^n z^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} z^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{1.3\ldots(2n+1)} z^{2n+1}$$

Exercice 38 : Démontrer que la série de fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n} e^{-nx}$ converge pour tout réel x positif et calculer sa somme.

Exercice 39 : Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{2n+1} x^n.$$

Exercice 40 : On pose $a_n = 1 + 1/2 + 1/3 \ldots + 1/n$.

1. Rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$?
2. Soit $f(x)$ la somme de cette série. En utilisant la relation $a_n = a_{n-1} + 1/n$, montrer que $xf(x) - f(x)$ est la somme d'une série entière simple.
3. En déduire $f(x)$.

Exercice 41 : Rayon de convergence et somme de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} z^n$.

(Le résultat est : $1 - \log(1-z)\left(1 - \frac{1}{z}\right)$*.)*

Exercice 42 : Montrer que $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n(n+2)} = 4\log 2 - 2$.

Indication :

On montrera d'abord que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$ a pour somme $-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\log(1-x)$

Exercice 43 :

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+1}$?
2. Montrer que cette série converge uniformément sur $[-1, a]$ pour tout $a < 1$ (on utilisera le théorème des séries alternées).
3. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.
4. En utilisant la méthode de sommation d'Abel, montrer que pour tout r, $0 < r < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+1}$? converge uniformément sur $D_r = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| \leq 1, \; |1 - z| \geq r\}$.

Exercice 44 : Quel est le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3n+2} \; ?$$

1. Montrer que la série est uniformément convergente sur $[-1, a]$ pour tout $a < 1$.
2. En déduire que la somme de cette série est continue sur $[-1, 1[$ puis la valeur de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$$

3. Montrer, plus généralement, que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{3n+2}$ converge uniformément sur $D_r = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| \leq 1, \; |1 - z| \geq r\}$, pour tout r, $0 < r < 1$.

Exercice 45 :

1. Montrer que la fonction $\dfrac{\sin t}{t}$ est développable en série entière au voisinage de 0 et expliciter ce développement.
2. En déduire que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}.$$

3. En déduire la valeur approchée

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = 1.8519\ldots$$

Exercice 46 : On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Déterminer (a_n) de sorte que f vérifie l'équation différentielle

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

Calculer le rayon de convergence et la somme des séries obtenues ? Remarquer que l'ensemble des solutions obtenues est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ? Est-ce en contradiction avec les théorèmes généraux sur les équations différentielles linéaires ?

Exercice 47 : Donner le développement en série entière au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)} \qquad\qquad f(x) = \mathrm{ch}(x)\cos(x)$$

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x} \qquad\qquad f(x) = \mathrm{arctg}(x+a)$$

$$f(x) = \log\left(1 - 2x\cos a + x^2\right) \qquad\qquad f(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^p$$

Pour les cas 4 et 5 on considèrera la dérivée de f. Pour le dernier cas on cherchera, au moyen de deux dérivations successives, une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifiée par f.