Quelques remarques sur les séries numériques et intégrales impropres

Je suis surpris, depuis un an environ, du nombre d'étudiants qui écrivent *la fonction f est continue, donc l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$ est convergente*, et d'autres bizarreries du même genre. Ces quelques lignes sont la pour rappeler la différence entre intégrale ordinaire et intégrale impropre, et aussi pour souligner qu'il n'est pas besoin d'un gros effort pour mémoriser les théorèmes essentiels, vue l'analogie entre intégrales impropres et convergence des séries.

Seule l'intégrale des fonctions continues par morceaux, sur un **intervalle fermé borné** est au programme. Si f est continue par morceaux sur un tel intervalle $[a, b]$, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ **est définie**, point. Ecrire *est convergente* au lieu de est définie, ce n'est pas plus savant, c'est au contraire manifester son incompréhension. Pour alléger les écritures, on se placera dans le cadre de l'intégration des fonctions continues.

Les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ ou $\int_{-\infty}^b f(t)\,dt$ n'ont pas de sens dans ce cadre là. De même, pour tous réel $a < b$, si la fonction f est continue sur $[a, b[$ mais ne se prolonge pas en une fonction continue sur $[a, b]$, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ n'est pas définie.

De la même manière que la somme d'une série numérique est définie comme limite de sommes ordinaires (les sommes partielles), une intégrale impropre ou intégrale généralisée est définie comme une limite d'intégrales ordinaires.

Tous les énoncés (sauf ceux du paragraphe 5) suivants sont numérotés deux fois avec le même numéro. Le premier énoncés est relatif aux séries, le second relatif aux intégrales impropres. Pour alléger les énoncés relatifs aux intégrales impropres (à part dans la définition 1), toutes les fonctions f considérées sont supposées continues sur $[a, b[$ dans le cas d'une intégrale impropre en b, continues sur $]a, b]$ dans le cas d'une intégrale impropre en a.

Définition 1. *Dire que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente, c'est dire que la suite $(S_n)_n$, définie par $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$, est convergente. Par définition, la somme de la série, notée, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est la limite de S_n quand n tend vers l'infini.*

Définition 1.

1. **[intégrale impropre à droite]** *Soit a un réel, et $a < b$, où b est soit réel, soit $+\infty$. Soit f une fonction continue sur $[a, b[$. Dire que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ est convergente, c'est dire que la fonction $F(X)$ définie par*
$$F(X) = \int_a^X f(t)\,dt$$
a une limite quand X tend vers b, et par définition
$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{X \to b} \int_a^X f(t)dt.$$

2. **[intégrale impropre à gauche]** *Soit b un réel, et $a < b$, où a est soit réel, soit $-\infty$. Soit f une fonction continue sur $]a,', b]$. L'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ est convergente, c'est dire que la fonction $F(X)$ définie par*
$$F(X) = \int_X^b f(t)\,dt$$
a une limite quand X tend vers a, et par définition
$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{X \to a} \int_X^b f(t)dt.$$

C'est cette définition de l'intégrale impropre comme limite d'intégrales ordinaires qui fait que l'on parle de convergence dans le cas des intégrales impropres. Et c'est l'utilisation du même symbole $\int$ pour représenter les intégrales impropres et les intégrales ordinaire qui incite certains à oublier que ce sont deux notions bien différentes.

Certains étudiants ayant entendu parler de l'intégrale de Lebesgue, et de la puissance de cette théorie, s'imaginent que c'est le cadre trop restreint de l'intégration des fonctions continues qui oblige à introduire la notion d'intégrale impropre… *Si les fonctions intégrables au programme du Capes étaient les fonctions intégrables au sens de Lebesgue, il n'y aurait pas besoin de s'encombrer de la notion d'intégrale impropre.* C'est faux. Un exemple très simple est l'intégrale impropre
$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt,$$
qui n' a pas plus de sens dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue que dans celui de l'intégration des fonctions continues.

Définition 2. *Soit $\sum_{n=0}^\infty u_n$ une série convergente. Le* reste d'ordre *n de cette série est la somme*
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Définition 2. *Soit* $\int_a^b f(t)dt$ *une intégrale impropre en* b*, convergente. Pour tout* X*,* $a \leq X < b$*, le* **reste d'ordre** X *de cette intégrale est l'intégrale impropre*

$$\int_X^b f(t)dt.$$

Théorème 1. *La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes, c'est à dire que, pour tout* $n_0 \in \mathbb{N}$*, les deux séries*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \qquad et \qquad \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$

sont de même nature.

Démonstration. Les sommes partielles de ces deux séries diffèrent d'une constante qui est $\sum_{k=0}^{n_0} u_k$. Elles sont donc simultanément convergentes ou divergentes. □

Théorème 1. *Soit* $\int_a^b f(t)dt$ *une intégrale impropre en* b*. Pour tout* $a_1 \in [a, b[$ *les intégrales impropres*

$$\int_a^b f(t)dt \qquad et \qquad \int_{a_1}^b f(t)dt$$

sont de même nature.

Démonstration. Les intégrales partielles $F(X) = \int_a^X f(t)dt$ et $F_1(X) = \int_{a_1}^X f(t)dt$ diffèrent d'une constante qui est $\int_a^{a_1} f(t)dt$. Elles sont donc simultanément convergentes ou divergentes lorsque X tend vers b. □

1 Le critère de Cauchy

Théorème 2 (Le critère de Cauchy)**.** *Pour que la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *soit convergente, il faut et il suffit que, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un* N *tel que,*

$$\forall p, q \quad N \leq p < q \implies \left| \sum_{n=p}^{q} u_n \right| \leq \varepsilon.$$

Théorème 2 (Le critère de Cauchy)**.** *Pour que l'intégrale* $\int_a^b f(t)dt$*, impropre en* b*, soit convergente, il faut et il suffit que, pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* c*,* $c < b$*, tel que*

$$\forall X', X'' \quad c \leq X' \leq X'' < b \implies \left| \int_{X'}^{X''} f(t)dt \right| \leq \varepsilon.$$

2 Fonctions ou séries positives

Pour les fonctions positives, ou séries à termes positifs, on dispose de critères très commodes permettant de déterminer la nature de la série, ou de l'intégrale.

Théorème 3 (Le théorème de la limite monotone)**.** *Soit* $u_n \geq 0$*. Alors la série* $\sum u_n$ *est convergente si et seulement si ses sommes partielles* $S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *sont majorées.*

Théorème 3 (Le théorème de la limite monotone)**.** *Soit* $f \geq 0$*. Alors l'intégrale impropre en* b *(resp. en* a*)* $\int_a^b f(t)dt$ *est convergente si et seulement si ses intégrales partielles* $\int_a^X$ *(resp.* $\int_X^b$*) sont majorées.*

Théorème 4 (La règle de comparaison)**.** *Soient* u_n *et* v_n *positifs pour tout* n*. Si* $0 \leq u_n \leq v_n$ *alors*

1. *Si la série* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *est convergente la série* $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$*, est aussi convergente, et, de plus*
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$
.
2. *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *diverge, il en est de même de* $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$*.*

Théorème 4 (La règle de comparaison)**.** *Soient* f *et* g *positives.*

1. *Si l'intégrale impropre* $\int_a^b g(t)\,dt$ *converge, il en est de même de l'intégrale impropre* $\int_a^b f(t)\,dt$*, et, de plus*
$$\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$$
.
2. *Si* $\int_a^b f(t)\,dt$ *diverge, il en est de même de* $\int_a^b g(t)\,dt$*.*

Théorème 5 (La règle des équivalents)**.** *Soiet* u_n *et* v_n *positifs pour tout* n*. Si* $u_n \sim v_n$ *quand* n *tend vers l'infini, alors* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *est de même nature que* $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$*. De plus*

1. *Si les deux séries sont convergentes, alors les restes d'ordre* n*,* $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ *et* $\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ *sont équivalents quand* n *tend vers l'infini.*
2. *Si les deux séries sont divergentes, les sommes partielles d'ordre* N*,* $\sum_{n=0}^{N} u_n$ *et* $\sum_{n=0}^{N} v_n$ *sont équivalentes quand* N *tend vers l'infini.*

Énonçons l'analogue relatif aux intégrales dans le cas d'une intégrale impropre en b. Le lecteur énoncera le théorème dans le cas d'une intégrale impropre en a.

Théorème 5 (La règle des équivalents)**.** *Soit f et g positives sur $[a, b[$. Si $f(t) \sim g(t)$ au voisinage de b alors les deux intégrales impropres en b, $\int_a^b f(t)\, dt$, et $\int_a^b g(t)\, dt$. sont de même nature. De plus*

1. *Si les deux intégrales impropres sont convergentes, alors les restes $\int_X^b f(t)dt$ et $\int_X^b g(t)dt$ sont équivalents quand X tend vers b.*
2. *Si les deux intégrales impropres sont divergentes, les intégrales partielles $\int_a^X f(t)dt$ et $\int_a^X g(t)dt$ sont équivalentes quand X tend vers b.*

Théorème 6 (Série de Riemann)**.** *La série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Théorème 6 (Intégrale de Riemann)**.** *L'intégrale impropre $\int_a^{\infty} \frac{1}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

3 Convergence et convergence absolue

Définition 3. *On dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est* absolument convergente *si la série $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ est convergente.*

Définition 3. *On dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ est* absolument convergente *si l'intégrale impropre $\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente.*

Théorème 7. *Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est absolument convergente elle est convergente, et*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| .$$

Théorème 7. *Si l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente elle est convergente, et*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

4 Intégrales impropres ou séries non absolument convergentes

La encore l'analogie se poursuit, l'intégration par parties jouant, pour les intégrales impropres, le rôle de la méthode de sommation d'Abel pour les séries. Par exemple pour prouver que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ est convergente, on constate que les sommes $\sum_{n=1}^{N} \cos n$ sont bornées, et que la suitt $(1/n)$ tend vers 0 en décroissant, et on utilise la méthode de sommation d'Abel.

De même, pour l'étude de la convergence de l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x}$. On constate que les intégrales $\int_1^T \cos t dt$ sont bornées et que la fonction

$1/x$ tend vers 0 en décroîssant. Cela nous conduit à utiliser la méthode d'intégrations par parties, en écrivant

$$\int_1^X \frac{\cos x}{x} dx = \int_1^X u dv \qquad \text{avec } u = \frac{1}{x}, \quad dv = \cos x dx.$$

Il vient

$$\int_1^X \frac{\cos x}{x} dx = \left[\frac{\sin x}{x}\right]_1^X + \int_1^X \frac{\sin x}{x^2} dx = \frac{\sin X}{X} - \sin 1 + \int_1^X \frac{\sin x}{x^2} dx.$$

Cette fois on a gagné car $\sin X/X$ tend vers 0 quand X tend vers l'infini (la fonction sin est bornée), et l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ est absolument convergente, par la règle de comparaison, car $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$.

5 Un résultat particulier aux intégrales impropres

Rappelons le résultat suivant, à bien distinguer du cas de l'intégrale de Riemann (dans le cas de l'intégrale de Riemann, il y convergence si et seulement si $\alpha > 1$).

Théorème 8. *Soit $a < b$ deux nombres* **réels**. *Les intégrales impropres*

$$\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} \qquad \textit{et} \qquad \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$$

convergent si et seulement si $\alpha < 1$.

6 Une analogie qui ne fonctionne pas

Il ne faut pas cependant se fier sans retenue à cette analogie entre intégrales impropres et séries numériques. Le théorème suivant est bien connu : Si la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. L'analogue relatif aux intégrales impropres serait : *Si l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, alors $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$,* **ce qui est faux**.