Chapitre 1

Séries numériques, ou séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie

Définitions.

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ représente indifféremment le corps des réels $\mathbb{R}$, ou le corps des complexes $\mathbb{C}$. Le symbole E représente un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Se donner une série à valeurs dans E, c'est se donner une suite $u = (u_n)_n$ à valeurs dans E. On parle alors de la série de terme général u_n, ou encore de la série $\sum u_n$. Si $E = \mathbb{K}$, on parle de série numérique, réelle, ou complexe, selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Lorsque E est un espace vectoriel normé de dimension finie, on notera $|x|$, la norme du vecteur x de E, et non pas $\|u\|$. Nous réserverons la notation $\|f\|$ pour représenter la norme au sens de la convergence uniforme d'une *fonction* $f\ X \to E$ (cf. chapitre suivant).

Définition 1.1. *On appelle somme partielle d'ordre n de la série de terme général u_n le vecteur de E défini par :*

$$S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Définition 1.2. *On dit que la série de terme général u_n est convergente si la suite de ses sommes partielles est une suite convergente d'éléments de E. La limite de cette suite est appelée la somme de la série, et notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Autrement dit, par définition,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n(u) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Attention ! Dans le cas d'une série à termes réels, dire qu'elle est convergente c'est dire que la suite de ses sommes partielles est une suite de réels qui admet une *limite finie*. Dans le cas ou, par exemple, $\lim_{n\to\infty} S_n(u) = +\infty$ on écrit aussi $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ mais la série n'est pas une série convergente.

Définition 1.3. *On suppose que la série de terme général u_n est* convergente *de somme $S(u)$; on appelle* reste d'ordre *n de la série, la quantité*

$$R_n(u) = S(u) - S_n(u) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

Remarques :

1. En pratique les séries considérées sont souvent des suites définies, non pas sur $\mathbb{N}$ tout entier, mais sur un intervalle de $\mathbb{N}$ de la forme $[n_0 + \infty[$. Les modifications à faire dans les énoncés sont évidentes. Il est d'ailleurs important de remarquer que l'on ne change pas la nature d'une série, c'est à dire le fait qu'elle converge ou non, en enlevant un nombre fini de termes.
2. Soit $\sum u_n$ une série convergente. La suite des sommes partielles $(S_n(u))$ et la suite extraite $(S_{n-1}(u))$ ont toutes deux pour limite la somme de la série. Il en résulte que $\lim_{n\to*\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n(u) - S_{n-1}(u) = S(u) - S(u) = 0$. Mais cette condition n'est pas suffisante pour assurer la convergence de la série (penser par exemple à $\sum u_n$ avec $u_n = 1/n$).

Exemple: Soit la série numérique de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Sa somme partielle d'ordre n est

$$S_n(u) = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Si on remarque que $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ cette somme s'écrit

$$S_n(u) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Ceci est une somme télescopique qui se simplifie en $S_n(u) = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Quand n tend vers l'infini, $S_n(u)$ tend donc vers 1, et, par définition de la convergence et de la somme d'une série, on a prouvé que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Pour des exemples similaires de séries télescopiques, voir les premiers exercices.

Exemple: La série réelle de terme général $u_n = 1/n$, $n \geq 1$, est appelée la série harmonique. Soit

$$S_n(u) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

sa somme partielle d'ordre n. Considérons $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. C'est une somme de n fractions, dont la plus petite est $1/2n$; on a donc

$$S_{2n} - S_n \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Si la suite (S_n) convergeait vers une limite S, la suite extraite (S_{2n}) convergerait aussi vers S, et la différence $S_{2n} - S_n$ convergerait vers 0, ce qui est faux, vue la minoration ci desssus. La série harmonique est donc divergente.

Séries numériques à termes positifs.

De nombreux théorèmes simplifient l'étude des séries numériques à termes réels positifs. Rappelons ici les principaux.

Théorème 1.4. *Pour qu'une série numérique à termes positifs soit convergente il faut et il suffit que la suite de ses sommes partielles soit majorée.*

Preuve : Soit S_n la somme partielle d'ordre n. Puisque $S_{n+1} = S_n + u_n \geq S_n$, la suite $(S_n)_n$ est croissante, et par le *théorème de la limite monotone*, la suite croissante $(S_n)_n$ converge si, et seulement si, elle est majorée. □

Théorème 1.5 (Série géométrique)**.** *La série géométrique de premier terme a et de raison $r \geq 0$ converge si et seulement si $r < 1$. Dans ce cas on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}.$$

Théorème 1.6 (La règle de comparaison)**.** *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites positives, telles que $u_n \leq v_n$ pour tout n. Alors*

1. *Si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.*
2. *Si la série $\sum u_n$ diverge, la série $\sum v_n$ diverge aussi.*

Théorème 1.7 (Le critère de d'Alembert)**.** *Soit (u_n) une suite strictement positive telle que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = R$.*

1. *Si $R < 1$ la série $\sum u_n$ est convergente.*
2. *Si $R > 1$ alors $\lim u_n = +\infty$, et $\sum u_n$ diverge grossièrement.*

Attention ! Une faute très courante consiste à se contenter de vérifier que $u_{n+1}/u_n < 1$. Non, l'important ce n'est pas que chacun des u_{n+1}/u_n soit strictement plus petit que 1, mais que la limite de (u_{n+1}/u_n) soit strictement plus petite que 1. Là encore penser à l'exemple de la série harmonique $u_n = 1/n$; on a $u_{n+1}/u_n < 1$, mais la série diverge.

Théorème 1.8 (La règle de Cauchy)**.** *Soit (u_n) une suite strictement positive telle que $\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = R$.*

1. *Si $R < 1$ la série $\sum u_n$ est convergente.*
2. *Si $R > 1$ alors $\lim u_n = +\infty$, et $\sum u_n$ diverge grossièrement.*

Théorème 1.9 (La règle des équivalents)**.** *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites positives dont les termes généraux sont équivalents, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, c'est à dire que l'une converge si et seulement si l'autre converge. De plus*

1. *Si les deux séries sont divergentes on a, pour n tendant vers l'infini :*

$$S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} u_k \ \sim \ S_n(v) = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

2. *Si les deux séries sont convergentes on a, pour n tendant vers l'infini :*

$$R_n(u) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \ \sim \ R_n(v) = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$$

Attention ! Cet énoncé est faux sans l'hypothèse $u_n, v_n > 0$. Vérifiez le avec $u_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ et $v_n = u_n + 1/n$.

Les lemmes suivants sont très importants. Il n'est pas nécessaire de connaitre par coeur leurs énoncés, mais il faut les retrouver chaque fois qu'ils sont utiles. Ils permettent de déterminer la nature d'une série, mais aussi d'encadrer sa somme et, plus utilement, son reste R_n. Ceci est important pour le calcul de la somme avec une bonne précision, même dans le cas d'une série très lentement convergente, comme la série de terme général $1/(n \ln^2 n)$ (cf . exercices).

Lemme 1.10 (Comparaison avec une intégrale)**.** *Soit f positive décroissante, définie sur $[a-1, +\infty[$, avec a entier naturel non nul. Pour tout entier $b \geq a$, on a :*

$$\int_a^{b+1} f(t)dt \leq \sum_{k=a}^{k=b} f(k) \leq \int_{a-1}^{b} f(t)dt.$$

Preuve : Pour tout k on a

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt,$$

car $f(t) \leq f(k)$ sur $[k, k+1]$, et $f(t) \geq f(k)$ sur $[k-1, k]$. En additonnant terme à terme ces encadrements pour k variant de a à b on obtient le résultat. □

Théorème 1.11. *Si f est une fonction positive décroissante sur $\mathbb{R}$, la série de terme général $u_n = f(n)$ est de nême nature que l'intégrale impropre*

$$\int_a^{\infty} f(t)dt.$$

Lemme 1.12. *Soit f positive et décroissante, telle que l'intégrale impropre $\int_n^{\infty} f(t)dt$ soit convergente. Le reste d'ordre n de la série de terme général $u_n = f(n)$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ est encadré par*

$$\int_{n+1}^{\infty} f(t)dt \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(t)dt.$$

Théorème 1.13 (Les séries de Riemann)**.** *. Soit $\alpha > 0$. La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Note : Une autre famille classique de séries est la famille des séries de Bertrand. Ce sont les séries de la forme $u_n = 1/(n^\alpha \log^\beta n)$. Si $\alpha \neq 1$ c'est lui qui dicte la nature : il y a convergence si $\alpha > 1$ et divergence si $\alpha < 1$. Si $\alpha = 1$, il y convergence si et seulement si $\beta > 1$. Ce résultat n'est pas au programme du CAPES. Vous devez donc, si vous en avez besoin, le démontrer.

Séries à termes quelconques.

Quand les u_n ne sont pas des réels ≥ 0, un bon moyen de prouver que la série $\sum u_n$ est convergente est d'utiliser la notion de convergence absolue :

Définition 1.14. *Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans E. Si la série de terme général $\sum |u_n|$ est une série convergente, on dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.*

Théorème 1.15. *Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie, absolument convergente. Alors cette série est convergente, et*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \, .$$

Si la série n'est pas absolument convergente, ou si on ne sait pas répondre à cette question, on peut regarder du coté du théorème des séries alternées, ou de sa généralisation qui est le critère d'Abel.

Définition 1.16. *Soit $\sum u_n$ une série réelle. On dit que $\sum u_n$ est une série alternée si $(-1)^n u_n$ est de signe constant.*

Théorème 1.17 (Le théorème des séries alternées)**.** *Soit $\sum u_n$ une série alternée, avec $(|u_n|)_n$ décroissante de limite 0,*
Alors la série est convergente, et, de plus

1. *sa somme est du signe du premier terme, et elle est majorée en valeur absolue par celui ci, c'est à dire*

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right| \leq |u_0|.$$

2. *Pour tout n, le reste $R_n(u)$ est du signe de u_{n+1} et $|R_n(u)| \leq |u_{n+1}|$.*

Remarque : La décroissance de $|u_n|$ est essentielle. Lorsque $|u_n|$ n'est pas décroissante, la série n'est en général pas convergente, et quand elle converge, l'assertion 2 est en général fausse.

La méthode de sommation d'Abel

Dans le cas d'une série réelle non alternée dont le signe oscille suffisamment rapidement, ou bien dans le cas d'une série à valeurs dans E, non absolument convergente, on peut essayer le critère d'Abel, qui est la généralisation du théorème des séries alternées. Mais ce critère n'est pas au programme du CAPES. Ce qui est au programme c'est la méthode de sommation d'Abel qui est le calcul aboutissant au lemme suivant, lemme, qu'il faudra redémontrer chaque fois qu'on en aura besoin.

Lemme 1.18 (Lemme d'Abel)**.** *Soit $(a_n)_n$ une suite de réels positifs, décroissante, et $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans E telle que $\forall n$ $\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq M$. Alors*

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k u_k\right| \leq a_0 M.$$

Remarque : Cet énoncé est simple à retenir si on remarque que le théorème des séries alternées est le cas particulier que l'on obtient en prenant dans l'énoncé ci dessus $u_n = (-1)^n$, et $M = 1$.

Preuve : Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k u_k$, et $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On écrit, et c'est ce calcul qui est la méthode de sommation d'Abel,

$$\begin{aligned}
S_n &= a_0u_0 + a_1u_1 + \ldots a_nu_n \\
&= a_0U_0 + a_1(U_1 - U_0) + a_2(U_2 - U_1) + \ldots + a_n(U_n - U_{n-1}) \\
&= U_0(a_0 - a_1) + U_1(a_1 - a_2) + \ldots U_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + U_n a_n \\
|S_n| &\leq M(a_0 - a_1 + a_1 - a_2 + \ldots a_{n-1} - a_n + a_n) = Ma_0,
\end{aligned}$$

en majorant chaque $|U_k|$ par M, et remarquant que, vue la décroissance de a_n, $|a_{k-1} - a_k| = a_{k-1} - a_k$. □

Application de la méthode de sommation d'Abel à la convergence des séries

Soit donc a_n une suite de réels qui tendent vers 0 en décroissant, et u_n une suite à valeurs dans E telle qu'il existe un nombre M qui majore toutes les quantités $\left|\sum_{n=p}^{q} u_n\right|$. On prouve la convergence de la série $\sum a_n u_n$ en procédant ainsi :

Notons S_n la somme partielle d'ordre n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k u_k$. La méthode de sommation d'Abel appliquée à la série de terme général $a_n u_n$ et de premier terme $a_{p+1}u_{p+1}$ donne la majoration

$$|S_q - S_p| = \left|\sum_{k=p+1}^{k=q} a_k u_k\right| \leq M a_{p+1}. \tag{1.1}$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Vu $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ l'équation (1.1) montre que la quantité $|S_q - S_p| < \varepsilon$ pour p et q suffisamment grands. Autrement dit, $(S_n)_n$ est une suite de Cauchy, c'est dire que la série $\sum a_n u_n$ est une série convergente. Mieux, en faisant tendre q vers l'infini dans la majoration (1.1), on obtient la majoration du reste

$$|R_p| = |S - S_q| \leq M a_{p+1}, \tag{1.2}$$

qui est l'analogue de la majoration du reste dans le théorème (1.17) du théorème des séries alternée, la constante 1 étant remplacée par la constante M.

Chapitre 2

Suites et séries de fonctions à valeurs dans un espace normé de dimension finie.

On s'intéresse ici à des suites de fonctions définies sur un ensemble X qui sera souvent, mais pas nécessairement, un intervalle de $\mathbb{R}$, et prenant leurs valeurs dans un espace normé E de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2.1 Rappels sur les fonctions à valeurs dans un esace normé

Définition 2.1. *On dit que la fonction f $X \to E$ est* bornée*, s'il existe un $A \in \mathbb{R}^+$ tel que*

$$\forall x \in X, \quad |f(x)| \leq A.$$

Définition 2.2. *Soit f une fonction bornée $f : X \to E$. On appelle* **norme de f au sens de la convergence uniforme***, le nombre positif ou nul*

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Définition 2.3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E.*

1. *On dit que f est dérivable [1] au point $t_0 \in I$, de dérivee u, si*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = u.$$

2. *Lorsque f est dérivable en tout point t de I on dit que f est dérivable sur I, et on note $f' : I \to E$ l'application qui envoie $t \in I$ sur la dérivée de f au point t.*

[1] Pour ceux qui connaissent la notion d'application différentiable, dire que f est dérivable en t_0, est équivalent à dire que f est différentiable en t_0. Si u est le vecteur dérivée de f au point t_0, la différentielle de f au point t_0 est l'application linéaire $df : \mathbb{R} \to E, \ h \mapsto hu$

3. *On définit alors de manière évidente, par récurrence, la notion de fonction de classe C^k définie sur I, à valeurs dans E. Par définition f est de classe C^0 si elle est continue. Et, pour $k \geq 1$, f est de classe $\mathbb{C}^k$, si f est dérivable, et si sa dérivée f' est de classe C^{k-1}.*

Suites de fonctions.

Définition 2.4. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur X. On dit que la suite $(f_n)_n$ est* **simplement convergente** *si pour tout x de X la suite $(f_n(x))_n$ est une suite d'éléments de E qui est convergente.*

Définition 2.5. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur X. On dit que la suite $(f_n)_n$* **converge uniformément** *vers la fonction f si pour tout n suffisament grand la fonction $f - f_n$ est bornée, et si*

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\| = 0.$$

Remarque :

1. La définition ci–dessus est équivalente à :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \ n > n_0 \implies \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

2. Notez la différence entre les formules quantifiées traduisant les notions de convergence simple et uniforme :

Conver. simple :	$\forall x \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n,\ n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
Conver. uniforme :	$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall x \ \forall n,\ n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Dans le cas de la convergnce simple l'entier n_0 dépend de x. Autrement dit, la rapidité de la convergence de $f_n(x)$ vers $f(x)$ dépend du point x considéré.

3. En pratique, pour prouver la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ vers f sur l'ensemble X, on majore $|f(x) - f_n(x)|$ par un nombre α_n indépendant de x, qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Théorème 2.6. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur un intervalle I.* **Si la suite f_n converge uniformément vers** *f, alors la fonction limite f est une fonction continue.*

Théorème 2.7. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur un intervalle* **fermé borné** *$[a, b]$. Si la suite $(f_n)_n$* **converge uniformément vers** *f, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt.$$

On exprime ceci en disant que l'on peut permuter les symboles lim et $\int$.

Théorème 2.8. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle réel quelconque I de $\mathbb{R}$ telle que,*

1. *Il existe un point x_0 de I tel que la suite $(f_n(x_0))_n$ converge.*
2. *La suite des dérivées $(f'_n)_n$ converge uniformément sur tout intervalle fermé borné $[a,b]$ contenu dans I.*

Alors

1. *La suite des $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers une fonction f.*
2. *La fonction f est de classe C^1 et sa dérivée coïncide avec la limite de la suite (f'_n).*
3. *La suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout intervalle fermé borné $[a,b]$ contenu dans I.*

Séries de fonctions.

Définition 2.9. *Soit $(u_n)_n$ une série de fonctions définies sur X. On dit que la série est* **simplement convergente***, si, pour tout x de X, la série numérique des $(u_n(x))_n$, est une série convergente.*

Définition 2.10. *Soit $(u_n)_n$ une série de fonctions. On dit que la série est* **uniformément convergente***, si la suite des fonctions sommes partielles d'ordre n c'est à dire la suite de fonctions $(S_n)_n$, définie par*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$$

est une suite de fonctions uniformément convergente.

Remarque : Si la série des fonctions u_n est une série qui converge simplement, on peut considérer pour tout x la suite des restes d'ordre n de la série $u_n(x)$, $R_n(x) = \sum_{k>n} u_k(x)$. Dire que la série de fonctions $(u_n)_n$ est uniformément convergente, c'est aussi dire que la **suite des fonctions R_n converge uniformément vers** 0.

Définition 2.11. *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions bornées définies sur X ; on dit que la série des fonctions $(u_n)_n$ est* **normalement convergente***, si la série numérique positive $\sum \|u_n\|_\infty$ est convergente.*

Théorème 2.12. *Si une série de fonctions est normalement convergente alors elle est uniformément convergente, et aussi absolument convergente.*

Les théorèmes (2.6,2.7,2.8) donnent immédiatement les trois suivants :

Théorème 2.13. *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions continues sur un intervalle I.* **Si la série $\sum u_n$ est uniformément convergente de somme** *s, alors s est une fonction continue.*

Théorème 2.14. *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions continues sur un intervalle* **fermé borné** $[a,b]$. **Si la série $\sum u_n$ est uniformément convergente de somme** *s alors $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(t)\,dt$ est une série numérique convergente, et on a*

$$\int_a^b s(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(t)\,dt.$$

Théorème 2.15. *Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle réel quelconque I, telle que,*

1. *Il existe un point de x_0 de I tel que la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n(x_0)$ converge.*
2. *La série des fonctions dérivées $\sum_{n\geq 0} u'_n(x)$ converge uniformément sur tout intervalle fermé borné contenu dans I.*

Alors

1. *La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est simplement convergente sur I.*
2. *Soit $s = \sum_{n\geq 0} u_n$. Alors s est de classe C^1 et, pour tout x de I :*

$$s'(x) = \sum_{n\geq 0} u'_n(x).$$

3. *La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est uniformément convergente sur tout intervalle fermé borné contenu dans I.*

Attention ! Signalons ici une faute très souvent lue dans les copies : La convergence uniforme d'une suite (ou série) de fonctions sur chacun des intervalles $[-a, a]$, $0 < a < 1$ entraine bien sûr la convergence simple sur $]-1, 1[$, **mais pas la convergence uniforme sur** $]-1, 1[$.

En pratique le moyen le plus simple pour prouver la convergence uniforme d'une série de fonctions est de prouver qu'elle est normalement convergente.

Si l'on n'y parvient pas, on peut encore essayer de majorer la valeur absolue du reste $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$, par un nombre α_n qui ne dépend pas de x et qui tend vers 0. Autrement dit, montrer que la suite de fonctions (R_n) converge uniformément vers 0. Quand la série n'est pas absolument convergente, un bon moyen pour majorer $|R_n(x)|$ est le théorème des séries alternées, ou la méthode de sommation d'Abel.

Chapitre 3

Séries entières.

Les séries entières sont un cas particulier remarquable de séries de fonctions, pour lesquelles on dispose de théorèmes très utiles.

Définition 3.1. *Etant donnée une suite de complexes* $(a_n)_n$*, et un nombre* $z_0 \in \mathbb{C}$*, la série des fonctions* $u_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ *est appelée* **série entière autour de** z_0 *associée à la suite* $(a_n)_n$*.*

On n'énoncera la plupart des théorèmes suivants que dans le cas de séries entières autour de 0, la transposition au cas général étant évidente.

Théorème et définition 3.2. *Soit une série entière* $\sum a_n z^n$*. Il existe un* $R \in [0, +\infty]$ *tel que :*

1. *La série de fonctions converge simplement dans le disque* $|z| < R$*.*
2. *Pour tout* z*,* $|z| > R$*, la suite des* $|a_n z^n|$ *n'est pas majorée (et, a fortiori, la série* $\sum a_n z^n$ *diverge).*

Le nombre R *est appelé le* **rayon de convergence** *de la série* $\sum a_n z^n$*.*

Pour calculer le rayon de convergence d'une série entière, le plus simple est en général d'étudier, pour chaque valeur de z la série numérique à termes positifs $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n|$. Pour cette étude le critère de d'Alembert, ou celui de Cauchy sont souvent utiles.

Exemple: Soit la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} z^n. \tag{3.1}$$

Appliquons le critère de d'Alembert à la série des $u_n = \dfrac{|z|^n}{2n+1}$. On a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n+3}{2n+1} |z| = |z|.$$

Donc, par d'Alembert, si $|z| < 1$ la série est convergente, si $|z| > 1$ elle est divergente. Ceci montre que le rayon de convergence est 1.

Remarque : On ne peut rien dire a priori de la nature de la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, pour un z tel que $|z| = R$. Il y a des cas de convergence et des cas de divergence. Le théorème des séries alternées, ou celui d'Abel, donne souvent la réponse.

Théorème 3.3. *Si deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, convergent et ont même somme sur un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, alors elles sont identiques, i.e. $a_n = b_n$ pour tout n.*

Théorème 3.4.

1. *Si la série $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R, alors elle est* **normalement convergente sur tout disque fermé** $|z| \leq a < R$.
2. *Le rayon de convergence de la série des dérivées est le même que celui de la série initiale.*
3. *La somme de la série est indéfiniment dérivable et, à l'***intérieur** *du disque de convergence, on peut intégrer ou dériver terme à terme la série autant de fois que l'on veut.*

Corolaire 3.5. *Si $f(z)$ est la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, on a*

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$

Définition 3.6. *On dit que la fonction f est* **développable en série entière** *au voisinage de z_0, si z_0 est un point intérieur du domaine de définition de f, et si il existe une série entière*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

de rayon de convergence non nul dont la somme coïncide avec $f(z)$ sur un voisinage de z_0.

Remarque : Il résulte du théorème (3.4) qu'une condition **nécessaire** pour que f soit développable en série entière au voisinage de z_0 est qu'il existe un ouvert contenant z_0 sur lequel f soit indéfiniment dérivable. **Cette condition n'est pas suffisante**.

Théorème 3.7. *Si la fonction f est développable en série entière au voisinage de z_0, alors elle possède, pour tout n, un développement limité d'ordre n au voisinage de z_0 ; la partie régulière de ce développement s'obtient en tronquant à l'ordre n la série entière en z_0 dont f est la somme.*

Attention ! Bien que la série entière soit uniformément convergente dans chaque disque $|z| \leq r$, $r < R$, **cela n'entraine pas la convergence uniforme dans le disque ouvert** $|z| < R$.

Le théorème 3.4 ci dessus permet d'expliciter les développements en série entière de beaucoup de fonctions. Si par exemple la fonction $f(x)$ a une dérivée dont le développement est connu, on déduit immédiatement de ce dernier celui de f, et son rayon de convergence (il ne reste qu'à déterminer le coefficient $a_0 = f(0)$). Une autre méthode très employée est la suivante. Si la fonction f est solution d'une équation différentielle linéaire $a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + c(x)f(x) + d(x) = 0$ avec a, b, c, d polynômes, on explicite le développement en série entière du premier membre de l'égalité ci dessus en fonction des coefficients indéterminés (a_n) du développemt de $f(x)$. En écrivant que tous les coefficients de ce développement sont nuls on obtient une relation de récurrence qui permet de calculer les a_n. Les exercices donnent plusieurs exemples.

En tout cas, l'utilisation du corollaire (3.5) est rarement un bon moyen pour expliciter le développement en série entière d'une fonction f. Premièrement, avant de l'utiliser il faut déja avoir **prouvé** que la fonction f est développable en série entière (rappelons que le fait d'être indéfiniment dérivable n'est pas suffisant). Ensuite, le calcul explicite des dérivées succesives de f en 0 est en général inextricable.

Chapitre 4

Équations différentielles

Dans la première partie de ce chapitre on s'intéresse aux équations différentielles d'ordre 1 sur un espace vectoriel réel normé E de dimension finie. L'équation différentielle est dite numérique si $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{C}$. Dans la deuxième partie on s'intéresse aux équations différentielles numériques d'ordre ≥ 2. Le résolution d'une telle équation se ramène à la résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 à valeurs dans l'espace normé $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$.

I Équations différentielles d'ordre 1 sur E.

Définition 4.1. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, U un ouvert de $\mathbb{R}\times E$, et $f : U \to E$, une application continue. L'équation différentielle d'ordre 1 définie sur U par f est l'équation*

$$y' = f(t, y). \tag{4.1}$$

Une fonction $y : I \to E$, définie sur l'intervalle réel I, est une solution de (4.1) si y est dérivable, et si, pour tout t de I, le point $(t, y(t))$ appartient à U et $y'(t) = f(t, y(t))$.

Théorème 4.2. [Le théorème d'unicité de Cauchy] *On suppose f non seulement continue, mais de classe C^1. Si y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation différentielle (4.1) définies sur des intervalles ouverts I_1 et I_2, qui coïncident en un point $t \in I_1 \cap I_2$, alors y_1 et y_2 coïncident sur $I_1 \cap I_2$.*

Théorème 4.3. [Existence locale des solutions] *On suppose f de classe C^1. Soit $(t_0, y_0) \in U$. Il existe un intervalle ouvert I contenant t_0 et une solution $y : I \mapsto E$ de l'équation (4.1) telle que $y(t_0) = y_0$.*

4.1 Équations différentielles linéaires

Définition 4.4. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé de dimension finie, $A : I \mapsto \mathrm{End}(E)$ une application continue, et enfin $B : I \mapsto E$ une application continue. On note*

$$Y' = A(Y) + B, \text{ ou encore } Y' = AY + B, \tag{4.2}$$

l'équation différentielle définie par l'application

$$f \ : \ I \times E \mapsto E, \quad (t, Y) \to A(t)(Y) + B(t).$$

Une telle équation est appelée **équation différentielle linéaire** *définie sur I. Si $B = 0$, on dit que l'équation est* **homogène**. *Les solutions de l'équation (4.2) sont donc les fonction $Y \ : I \to E$ telles que $Y'(t) = A(t)(Y(t)) + B(t)$.*

Théorème 4.5 (Théorème d'existence globale et d'unicité)**.**
Soit l'équation linéaire (4.2) de la définition (4.4). Quelle que soit la condition initiale $(t_0, y_0) \in I \times E$, il existe une **unique** *solution* **définie sur** I **tout entier** *qui prend la valeur y_0 en t_0.*

Remarques :

1. Contrairement au cas d'une équation différentielle non linéaire, la continuité de f suffit ici à assurer l'existence et l'unicité des solutions.
2. De plus, toute solution sur un sous-intervalle de I se prolonge en une solution définie sur I tout entier.
3. Ceci est particulier au cas des équations linéaires comme le montre l'exemple de l'équation non linéaire
$$y' = y^2, \tag{4.3}$$
c'est à dire $y' = f(t, y)$ avec $f(t, y) = y^2$. Soit $y_0 > 0$. Considérons une solution qui prend la valeur y_0 en $t = 0$, définie sur un intervalle $J = [0, a[$. L'équation (4.3) montre que y est croissante. La fonction y est donc strictement positive sur I, et s'écrit
$$\frac{y'}{y^2} = 1.$$
Cela donne, en intégrant les deux membres entre 0 et t,
$$-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y_0} = \int_0^t \frac{y'(t)}{y^2(t)} dt = \int_0^t dt = t,$$
soit, pour tout t de J,
$$\frac{1}{y(t)} = \frac{1}{y_0} - t.$$
Comme $y(t) > 0$, il en résulte $t < 1/y_0$, et donc $J \subset [0, \frac{1}{y_0}[$. La solution y ne peut donc pas être prolongée au delà de $t = 1/y_0$.

4.2 Équation linéaire homogène

Théorème 4.6. *Soit $y(t)$ une solution de l'équation linéaire homogène $Y' = AY$ définie sur I. S'il existe un t_0 de I tel que $Y(t_0) = 0$, alors Y est identiquement nulle.*

Preuve : La fonction identiquement nulle de I dans E est une solution de $Y'(t) = A(t)Y(t)$ (car $A(t)$ est une application linéaire de E dans E), et elle prend la même valeur que Y en le point t_0. Par le théorème d'unicité de Cauchy, elle coïncide avec Y sur I tout entier. $\square$

Théorème et définition 4.7. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et l'équation différentielle linéaire homogène définie sur $I \times E$,*

$$Y' = AY, \tag{4.4}$$

1. *l'ensemble des solutions de (4.4) est un espace vectoriel de dimension n.*
2. *Soient $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ des solutions de l'équation (4.4), et $t_0 \in I$. Pour que les fonctions $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ soient linéairement indépendantes il faut et il suffit que les vecteurs $Y_1(t_0), Y_2(t_0), \dots, Y_n(t_0)$ soient linéairement indépendants dans E. Si cela est vérifié, alors, quelle soit la valeur $t \in I$, les vecteurs $Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t)$ sont linéairement indépendants. Lorsque que cette condition est vérifiée on dit que $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ est un système fondamental de solutions de (4.4).*

4.3 Équations linéaires réelles

Le cas des équations différentielles linéaires numériques est particulièrement simple. Leur résolution se ramène à des calculs de primitives. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Se donner une application linéaire de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ c'est se donner un élément $a(t) \in \mathbb{K}$, et (4.2) s'écrit

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t). \tag{4.5}$$

avec $a, b \in C(I, \mathbb{K})$

Théorème 4.8. *Soit l'équation linéaire homogène réelle $y'(t) = a(t)y(t)$ définie sur l'intervalle I. La solution de cette équation qui prend la valeur y_0 en t_0 est*

$$y(t) = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(t)dt\right) = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(t)dt}.$$

Preuve : Si $y_0 = 0$, y est identiquement nulle par le théorème de Cauchy, et $y = y_0 \int_{t_0}^{t} a(t)dt$.

Supposons donc $y_0 \neq 0$. Vu $\exp' = \exp$, par le théorème de dérivation d'une fonction composée si $y = y_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(t)dt\right)$, $y' = y\frac{d}{dt}(\int_{t_0}^{t} a(t)dt) = a(t)y$. Soit maintenant z une autre solution, prenant aussi la valeur y_0 en t_0. Alors

$$\left(\frac{z}{y}\right)' = \frac{z'y - zy'}{y^2} = \frac{azy - zay}{y^2} = 0.$$

Le rapport z/y est constant. Pour $t = t_0$ il vaut 1. Dond $z = y$. □

Variation de la constante, cas numérique. Supposons que l'on connaisse une solution u non nulle (et donc jamais nulle) de l'équation homogène $y' = ay$ associée à l'équation (4.5). Soit y une fonction quelconque définie sur I. Posons $y = zu$, c'est à dire $z = y/u$. On a alors, $y' = z'u + zu'$, et l'équation (4.5) s'écrit encore

$$z'u + zu' = azu + b$$

soit

$$z'u = z(au - u') + b = b,$$

ou encore $z' = b/u$. On en déduit z par intégration, puis $y = zu$.

4.4 Variation des constantes, le cas général

La méthode de variation de la constante s'applique aussi au cas de l'équation différentielle linéaire non homogène (4.2) en dimension n, si on connait un système fondamental $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ de solutions de l'équation homogène associée. La résolution de l'équation est alors ramenée à des calculs de primitives. Mais le théorème (4.5) ne s'étend pas à la dimension $n > 1$. On ne sait pas, en général, ramener la résolution d'une équation linéaire homogène vectorielle à des calculs de primitives.

Supposons donc que $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ soit un système fondamental de solutions de l'équation homogène $Y' = AY$.

On cherche Y sous la forme $Y = u_1 Y_1 + \cdots + u_n Y_n$, où $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont des fonctions numériques à déterminer. On a alors

$$Y' = \sum_{i=1}^{n} u_i' Y_i + \sum_{i=1}^{n} u_i Y_i', \qquad AY + B = B + A\left(\sum_{i=1}^{n} u_i Y_i\right) = B + \sum_{i=1}^{n} u_i A Y_i.$$

Puisque $Y_i' = AY_i$ pour tout i, il résulte de ces deux égalités que $Y' = AY + B$ si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} u_i' Y_i = B.$$

Pour tout t, $(Y_1(t), Y_2(t), \cdots, Y_n(t))$ est une base de E, et $(u_1'(t), u_2'(t), \ldots, u_n'(t))$ sont les coordonnées du vecteur $B(t)$ dans cette base. On en déduit $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ par intégration.

Équations différentielles numériques d'ordre n

4.5 Équivalence avec l'ordre 1

Définition 4.9. *Une équation différentielle numérique d'ordre n définie sur U et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ est une équation de la forme*

$$y^{(n)} = f(t, y, y^{'}, \ldots, y^{(n-1)}) \tag{4.6}$$

ou f est une fonction de classe C^1 définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$, et prenant ses valeurs dans $\mathbb{K}$. Une fonction $y : I \mapsto \mathbb{K}$, définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle si elle est et n fois dérivable, et si, pour tout t de I, le point $(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$ appartient à U, et, de plus, $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$.

La résolution d'une équation différentielle numérique d'ordre n se ramène à la résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.

Lemme 4.10. *L'application $\Phi_n : y \mapsto (y, y', \ldots, y^{n-1})$ est une application linéaire injective de $C^n(\mathbb{K})$ dans $C^1(\mathbb{K}^n)$.*

Théorème 4.11. *Soit* $F\ : U \to \mathbb{K}^n$*, la fonction définie par*

$$(t, y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}) \mapsto (y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, f(t, y_0, y_1, \cdots, y_{n-1})).$$

La fonction y *est une solution de l'équation* (4.6) *si et seulement si la fonction* $Y = \Phi_n(y)$ *est solution de*

$$Y' = F(t, Y).$$

A l'aide de ce changement de fonction inconnue les théorèmes relatifs aux équation différentielles d'ordre 1 donnent les suivants.

Théorème 4.12. [Théorème d'unicité de Cauchy] *Soit* y_1*,* y_2 *deux solutions de l'équation* (4.6) *définies sur l'intervalle* I *et* $t_0 \in I$ *tels que*

$$y_1(t_0) = y_2(t_0), \quad y_1'(t_0) = y_2'(t_0), \dots \quad , y_1^{n-1}(t_0) = y_2^{n-1}(t_0)$$

alors $y_1 = y_2$*.*

Théorème 4.13. [Existence] *Pour tout* $(n+1)$*–uplet* $(t_0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ *de* U*, il existe un intervalle ouvert* I *contenant* t_0 *et une solution* y *définie sur* I *telle que*

$$y(t_0) = a_0, \quad y'(t_0) = a_1, \quad \dots, y^{(n-1)}(t_0) = a_{n-1}.$$

4.6 Équations linéaires d'ordre n.

Définition 4.14. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*, et* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. Une équation différentielle linéaire numérique d'ordre* n *définie sur* I *et à valeurs dans* $\mathbb{K}$ *est une équation de la forme :*

$$y^{(n)} = a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y + b, \tag{4.7}$$

où $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ *et* b *sont des fonctions continues de* I *dans* $\mathbb{K}$*. Si* $b = 0$ *on dit que l'équation est une équation homogène. Les fonctions* $t \to a_i(t)$ *sont appelés les coefficients de l'équation.*

Théorème 4.15. *Soit l'équation différentielle linéaire d'ordre* n*,* (4.7)

1. *Pour toute condition initiale* $t_0 \in I$*,* $(u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$*, Il existe une unique solution de* (4.7) *définie sur* I *tout entier telle que* $y(t_0) = u_0$*,* $y'(t_0) = u_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1}$*.*
2. *Si* $b = 0$ *l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension* n*.*
3. *La solution générale de* (4.7) *s'obtient en ajoutant à une solution particulière de* (4.7) *la solution générale de l'équation homogène associée.*

Définition 4.16. *Un système fondamental de solutions de l'équation homogène*

$$y^{(n)} = a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y$$

est une base de l'espace vectoriel des solutions c'est à dire une famille de n *solutions linéairement indépendantes.*

4.7 Équation linéaire numérique, homogène à coefficients constants

Quand les a_n sont des constantes il est facile d'expliciter la solution générale d'une équation linéaire homogène.

Définition 4.17. *Si l'équation* (4.7) *est à coefficients constants, le polynôme de* $\mathbb{K}[X]$

$$X^n - a_1X^{n-1} - \ldots - a_{n-2}X^2 - a_{n-1}X - a_n$$

est appelé le polynôme caractéristique de cette équation.

Théorème 4.18.

1. *Si le polynôme caractéristique de* (4.7) *est scindé dans* $\mathbb{K}[X]$*, de racines deux à deux distinctes* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$*, une base de l'espace vectoriel des solutions de* (4.7) *est formée des* n *fonctions :*

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}. \tag{4.8}$$

2. *Dans le cas ou le polynôme caractéristique admet des racines multiples on obtient encore un système fondamental de solutions en remplaçant dans* (4.8) *le terme* $e^{\lambda t}$*, lorsque* λ *est une racine multiple d'ordre* r *du polynôme caractéristique , par la suite* $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{r-1}e^{\lambda t}$.

Remarque : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est le corps des réels, et si le polynôme caractéristique P de l'équation (4.7) n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$, on procède de la manière suivante. On commence par construire un système fondamental $\mathcal{S}_c$ de solutions complexes. Soit $\lambda = a + ib$, une racine de P, non réelle, dont l'ordre de multiplicité est r. Comme P est un polynôme réel, $\bar{\lambda}$ est aussi une racine de P, de même multiplicité r. En remplaçant, pour chaque entier k, $0 \le k \le r$, les deux fonctions complexes conjuguées, $t^k e^{\lambda t}$, $t^k e^{\bar{\lambda} t}$ de $\mathcal{S}_c$, par la paire $\left\{t^k e^{at}\cos bt, t^k e^{at}\sin bt\right\}$, formée de leur somme et de leur différence (qui sont deux encore deux solutions de $\mathcal{E}$), on obtient un système fondamental de solutions réelles.

Exemple: Un système fondamental de solutions réelles de $y^{(4)} - y = 0$ est formé des 4 fonctions e^t, e^{-t}, $\cos t$, $\sin t$, car le polynôme caractéristique $X^4 - 1$ admet les racines $1, -1, i, -i$. Les deux racines réelles 1 et -1 donnent les solutions e^t et e^{-t} ; les racines complexes i et $-i$ donnent les solutions complexes e^{it} et e^{-it}, dont on déduit les solutions réelles $\cos t$ et $\sin t$. Une base de solutions réelles est donc $(e^t, e^{-t}, \cos t, \sin t)$.

Les fonctions polynômes-exponentielles

Définition 4.19. *Une fonction polynômes-exponentielles , est une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par une formule de la forme :*

$$f(t) = \sum_{i=0}^{k} e^{\mu_i t} P_i(t),$$

où chaque P_i *est un polynôme de* $\mathbb{K}[t]$.

Théorème 4.20. *Si les μ_i sont deux à deux distincts et si la fonction exponentielle polynôme $\sum_{i=0}^{k} e^{\mu_i t} P_i(t)$ est identiquement nulle tous les P_i sont nuls.*

Exemple: Les fonctions suivantes sont des exemples de fonctions polynômes-exponentielles complexes.

1. $t \to e^{at}$.
2. $t \to \cos t$ car $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$.
3. $\cos(at)$ ou plus généralement tout polynôme en $\cos t$ et $\sin t$.
4. Tout polynôme .

Les fonctions polynômes-exponentielles sont étroitement liées à la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Théorème 4.21. *Soit une équation différentielle linéaire d'ordre n,* **à coefficients constants** *:*

$$y^n + a_0 y + a_1 y' + \ldots + \ldots a_{n-1} y^{(n-1)} = e^{\lambda t} P(t),$$

avec $P \in \mathbb{K}[t]$. Soit r l'ordre de multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique $A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ ($r = 0$ si λ n'est pas racine de A). Alors il existe une solution polynômes-exponentielles de la forme

$$y(t) = e^{\lambda t} t^r Q(t)$$

où Q est un polynôme de même degré que P.

4.8 Équation linéaire d'ordre 2 dont on connait une solution

La méthode suivante, qui ne porte pas de nom, est cependant très utile. Elle est spécifique au cas d'une équation différentielle numérique d'ordre 2. Ce n'est pas la méthode de variation de la constante.

Théorème 4.22. *Soit z solution non nulle de l'équation homogène associée à*

$$y'' = ay' + by + c. \tag{4.9}$$

En cherchant y sous la forme $y = uz$, avec u nouvelle fonction inconnue, on ramène la résolution de (4.9) à la résolution d'une équation linéaire d'ordre 1.

Preuve : De $y = uz$ on tire $y' = u'z + uz'$ et enfin $y'' = u''z + 2u'z' + uz''$. Il vient alors

$$y'' - ay' - by = u''z + u'(2z' - az) + u(z'' - az' - bz).$$

Par hypothèse le troisième terme de cette somme est nul et y est solution de l'équation proposée si et seulement si

$$u''z + u'(2z' - az) = c$$

ce qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 en la fonction inconnue u'. On en tire u', puis u, par calcul de primitive. $\square$

4.9 Le principe de superposition

Le théorème suivant, qui est une évidence, est très utile.

Théorème 4.23. *Si y_1 et y_2 sont solutions de*

$$\begin{aligned} y_1^{(n)} - a_{n-1}y_1^{(n-1)} - \cdots - a_0 y_1 &= b_1 \\ y_2^{(n)} - a_{n-1}y_2^{(n-1)} - \cdots - a_0 y_2 &= b_1, \end{aligned}$$

alors, pour tous α_1, α_2, $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ est solution de

$$y^{(n)} - a_{n-1}y^{(n-1)} - \cdots - a_0 y = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2.$$

Ce théorème, conjugué avec le théorème 4.21, est bien adapté à la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants dont le second membre est une exponentielle-polynôme.

Exemple Résoudre l'équation différentielle réelle $y' + y = t^2 + \cos t$.

On commence par remarquer que l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + y = 0$ est l'espace vectoriel réel de dimension 1 formé des multiples de e^{-t}. Il reste à obtenir une solution de l'équation avec second membre.

1. **Première méthode**. Variation de la constante. On pose $z = e^{-t}$ et on cherche y sous la forme $y = zu$. Alors $y' + y = t^2 + \cos t$ s'écrit

$$t^2 + \cos t = z'u + zu' + zu = z'u$$

et ceci est équivalent

$$z' = e^t(t^2 + \cos t).$$

Il faut calculer successivement une primitive de $t^2 e^t$, puis une primitive de $t \cos t$. Chacun de ses calculs utilise deux intégrations par parties.

2. **Deuxième méthode**. On utilise le principe de superposition et le théorème 4.21. Puisque le second membre $t^2 + \cos t$ est l'exponentielle polynôme $t^2 + \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}$ on va résoudre successivement $y' + y = t^2 = t^2 e^{0t}$, $y' + y = e^{it}$ et $y' + y = e^{-it}$. Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle est $X - 1$. 0 n'est pas racine de $X - 1$. L'équation $y' + y = t^2$ admet donc une solution de la forme $y = at^2 + bt + c$. Alors $y' = 2at + b$, et $y' + y = at^2 + (2a + b)t + b + c$. Pour que $y' + y = b$ il faut et il suffit que $a = 1$, $2a + b = 0$, c'est à dire $b = -2$, et enfin $b + c = 0$, c'est à dire $c = 2$.

Résolvons $y' + y = e^{it}$. Puisque i n'est pas racine du polynôme caractéristique $X - 1$, il existe une solution de la forme $y = \mu e^{it}$. Alors $y' + y = \mu(1 + i)e^{it}$ est égal à e^{it} si et seulement si $\mu = 1/(1 + i) = (1 - i)/2$. Cela donne la solution complexe $y_1 = ((1 - i)/2)e^{it}$.

Puisque y_1 est solution de $y' + y = e^{it}$, le conjugué de y_1, $y_2 = ((1 + i)/2)e^{-it}$ est solution de l'équation conjuguée $y' + y = e^{-it}$. Par le principe de superposition

$$y = y_1 + y_2 = \frac{1 - i}{2}e^{it} + \frac{1 + i}{2}e^{-it} = \cos(t) + \sin(t)$$

est solution de $y' + y = e^{it} + e^{-it} = 2\cos t$. Finalement une solution de $y' + y = t^2 + \cos t$ est $y = t^2 - 2t + 2 + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$.

4.10 Une erreur fréquente

On est souvent amené à résoudre une équation différentielle de la forme

$$a_n y^{(n)} + a_{(n-1)} y^{(n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{4.10}$$

Beaucoup appliquent alors à cette équation les théorèmes (4.8) ou (4.15), ce qui est incorrect. En effet cette équation n'est une équation différentielle linéaire d'ordre n en y que **sur un intervalle I sur lequel la fonction a_n ne s'annule pas.** Car, sur un tel intervalle, elle se met sous la forme

$$y^{(n)} = b_{(n-1)} y^{(n-1)} + \cdots b_1 y' + b_0 y,$$

en posant $b_k(t) = -a_k(t)/a_n(t)$, pour $0 \leq k \leq n-1$. Voir l'exercice 1.

4.11 Equation linéaire d'ordre 1, à coefficients constants à valeur dans un espace normé

Nous avons signalé que, contrairement au cas des équations linéaires numériques, il n'existe pas de méthode générale ramenant la résolution d'une équation différentielle lineaire homogène à valeur dans un espaced normé à des calculs de primitive. Cependant, lorsque l'endomorphisme A ne dépend pas de t, on peut expliciter les solutions de l'équation

$$X' = AX$$

en utilisant la notion d'exponentielle d'un endomorphisme.

Définition 4.24. *Soit A un endomorphisme d'un espace vectoriel normé de dimension finie E. L'*exponentielle de A *est l'endomorphisme* $\exp(A)$ *défini par*

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}. \tag{4.11}$$

La série définissant $\exp(A)$ est une série à valeurs dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathrm{End}(E)$. Cet espace est muni d'une norme naturelle,

$$|A| = \sup_{|x|\leq 1} |A(x)|,$$

norme qui possède la propriété $|AB| \leq |A|\,|B|$. Pour que l'exponentielle de A soit bien définie, il faut prouver que la série (4.11) converge. Par le théorème 1.15 il suffit pour cela de prouver qu'elle est absolument convergente. Cela est clair car $\left|\frac{A^n}{n!}\right| \leq \frac{|A|^n}{n!}$, et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{A^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|A|^n}{n!} = \exp(|A|).$$

Théorème 4.25. *Soit A un endomorphisme de E. La fonction $R : \mathbb{R} \to \mathrm{End}(E)$ définie par $R(t) = \exp(tA)$ est dérivable, et*

$$R'(t) = AR(t). \tag{4.12}$$

Preuve : Notons u_n l'application $t \mapsto \frac{t^n A^n}{n!}$. Les u_n sont des applications de $\mathbb{R}$ dans l'espace vectoriel normé de dimension finie $\mathrm{End}(E)$. La série de fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est simplement convergente, et, par définition, sa somme est $R(t) = \exp(tA)$. Pour prouver que R est dérivable, et expliciter sa dérivée, nous utilisons le théorème (2.15) de dérivation d'une série de fonctions. Puisque la série est simplement convergente, il ne reste plus qu'à montrer que la série des dérivées, $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(t)$ converge uniformément sur chaque intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Pour $n = 0$, $u_0(t) = \mathrm{Id}$, et $u'_0 = 0$. Pour $n \geq 1$, $u'_n(t) = \frac{t^{n-1}A^n}{(n-1)!}$ et donc

$$\left|u'_n(t)\right| \leq \frac{|t|^{n-1}}{(n-1)!} |A|^n .$$

Pour t dans l'intervalle fermé borné $[-M, M]$ on a la majoration

$$\left|u'_n(t)\right| \leq \frac{M^{n-1}}{(n-1)!} |A|^n ,$$

et donc, notant $\|u'_n\|_\infty$ la norme-sup de u'_n restreinte à $[-M, M]$,

$$\left\|u'_n\right\|_\infty \leq |A| \frac{M^{n-1} |A|^{n-1}}{(n-1)!}.$$

La série de terme général $\|u'_n\|_\infty$ est convergente. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$ est donc normalement convergente sur $[-M, M]$, et à fortiori, uniformément convergente. Par le théorème 2.15 la fonction R est dérivable, et, de plus, pour tout t,

$$R'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n = A \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = AR(t).$$

□

Théorème 4.26. *Soit E un espace normé de dimension finie, et $A \in \mathrm{End}(E)$. L'unique solution de l'équation différentielle*

$$X'(t) = AX(t)$$

qui prend la valeur X_0 en $t = 0$ est l'application X définie par

$$X(t) = \exp(tA)(X_0).$$

Preuve : Soit $X(t)$ l'application définie par $X(t) = \exp(tA)(X_0) = R(t)(X_0)$ en notant $R(t) = \exp(tA)$. Par définition d'une dérivée

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{R(t+h)(X_0) - R(t)(X_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{R(t+h) - R(t)}{h} (X_0) \right). \end{aligned}$$

L'application $U \mapsto U(X_0)$ de $\mathrm{End}(E)$ dans E est continue. Et donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} = R'(t)(X_0) = (AR(t))(X_0) = A(R(t)(X_0)) = A(X(t))$$

□

Exercices

Exercice 1 :

1. Montrer que la seule fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est solution de $t^3y'(t)+2y(t)=0$ est la fonction identiquement nulle.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de $t^2y'(t)+y(t)=0$ est un espace vectoriel de dimension 1, et en expliciter une base.
3. Montrer que l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ et solutions de $t^3y'-2y=0$ est un espace vectoriel de dimension 2.

Exercice 2 : Résoudre l'équation différentielle réelle, $y''+y=t\sin t$.

Exercice 3 : Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation differentielle $4xy''+2y'+y=0$ sachant qu'elle admet la solution $y=\cos\sqrt{x}$.

Exercice 4 : On se propose de résoudre sur $I=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ l'équation

$$y''-2y'+2y=\frac{e^x}{\cos^2 x} \tag{4.13}$$

1. Résoudrel'équation l'équation homogène $y''-2y'+2y=0$.
2. Soit y une fonction de classe $C^2\ : I\to\mathbb{R}$. Montrer que y est solution de (4.13) si et seulement si $Y=(y,y')$ est solution de $Y'=AY+B$ avec

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0\\ \frac{e^t}{\cos t}\end{pmatrix}$$

3. Expliciter un système fondamental de solutions du système homogène associé $Y'=AY$, puis appliquer la méthode générale de variation des constantes (cf. paragraphe 4.4), pour résoudre ce système.

Chapitre 5

Séries de Fourier.

5.1 Séries trigonométriques et séries de Fourier

Définition 5.1. *Une* série trigonométrique exponentielle *de péridoe* $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ *est une série de fonctions de la forme*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega nx}. \tag{5.1}$$

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{i\omega kx}$*. On dit que la série (5.1) converge vers* S *si la suite de fonctions* $(S_n)_n$ *converge simplement vers* S*.*

Définition 5.2. *Une* série trigonométrique *en sinus et cosinus de période* $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ *est une série de fonction de la forme*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega nx + b_n \sin \omega nx). \tag{5.2}$$

Théorème 5.3. *Si la série* $\sum c_n$ *est* **absolument convergentes***, la série (5.1) converge normalement sur* $\mathbb{R}$*.*

Théorème 5.4. *Si les séries* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *sont* **absolument convergentes***, la série trigonométrique (5.2) converge normalement sur* $\mathbb{R}$*,*

Définition 5.5. *Soit* f *continue par morceaux,* T*–périodique,* $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$*. La* série de Fourier de f *est la série trigonométrique* $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{in\omega t}$ *dont les coefficients sont les* $c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t) e^{-in\omega t}\, dt$*.*

La série de Fourier en sinus et cosinus de f *est la série* $a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$ *dont les coefficients sont*

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos n\omega t\, dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin n\omega t\, dt.$$

Remarque : Les coefficients c_n sont en générals complexes. Les coefficients a_n et b_n sont réels chaque fois que f est une fonction réelle.

Il résulte immédiatemment des formules d'Euler,

$$\cos(\omega nx) = \frac{e^{i\omega nx} + e^{-i\omega nx}}{2} \qquad \sin(\omega nx) = \frac{e^{i\omega nx} - e^{-i\omega nx}}{2i}$$

que les coefficients a_n et b_n de la série de Fourier en sinus et cosinus et les coefficients c_n de la série de Fourier sous forme exponentielle sont reliés par les relations

$$a_0 = c_0, \qquad a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{et} \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \qquad n \geq 1.$$

De plus, pour tout entier naturel n,

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{i\omega kx} = a_0 + \sum_{k=1}^{k=n} (a_k \cos \omega kx + b_k \sin \omega kx).$$

On peut donc parler sans ambiguïté de la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier, sans qu'il soit nécessaire de préciser s'il s'agit de la série sous forme exponentielle, ou en sinus et cosinus.

Définition 5.6. *$f(x)$ est de classe C^1 par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$ si il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < a_2 < \ldots < a_k = b$, et sur chaque intervalle $[a_k, b_k]$ une fonction f_k de classe C^1 sur $[a_k, b_k]$ qui coïncide avec f sur $]a_k, b_k[$.*

f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ si elle est de classe C^1 par morceaux sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.

Remarque : Cette définition laisse arbitraires les valeurs de f en les a_k.

Théorème 5.7. [Théorème de Dirichlet] *Si f est une fonction T–périodique et de classe C^1 par morceaux, la série de Fourier trigonométrique (resp. exponentielle) de f converge simplement vers la fonction*

$$x \to \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

La convergence est uniforme sur chaque intervalle fermé borné sur lequel f est continue.

Si f est de classe C^1 par morceaux et continue La série de Fourier trigonométrique (resp. exponentielle) de f est normalement convergente.

5.2 Convergence en norme quadratique d'une série de Fourier

Définition 5.8. *L'application $(f, g) \mapsto \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}dt$ définit un produit scalaire hermitien sur l'ensembles des fonctions continues par morceaux, et périodiques de période T. La norme quadratique est la norme associée à ce produit hermitien, $f \mapsto \|f\|_2 = \left(\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$.*

Avec cette définition le théorème suivant est une trivialité,

Théorème 5.9. *La famille des fonctions* $(e^{in\omega}x)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une famille orthonormée pour le produit scalaire défini ci-dessus. Le coefficient de fourier* $c_n(f)$ *est le produit scalaire de* f *et de* $e^{in\omega x}$.

Théorème 5.10. *Soit* f *une fonction* T*-périodique, continue par morceaux, et* c_k *ses coeffcients de Fourier. La somme partielle d'ordre* n

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{ik\omega x},$$

est la projection orthogonale de f *sur l'espace vectoriel engendré par les* $(e^{ik\omega x})_{|k|\leq n}$.

Démonstration. Il faut montrer que $f - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ik\omega x}$ est orthogonale à $e^{iq\omega}x$ pour tout q, $-n \leq q \leq n$. La famille des $e^{ik\omega x}$ étant orthogonale on a

$$\int_0^T \left(f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ik\omega x} \right) e^{-iq\omega x} = c_q(f) - c_q(f) = 0.$$

□

Le résultat important de ce paragraphe est le théorème suivant.

Théorème 5.11. *Pour toute fonction* f *continue par morceaux, et* T*-périoidique, La série de Fourier de* f *converge vers* f *en norme quadratique, c'est à dire que*

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - S_n(f)\|_2 = 0.$$

Théorème 5.12. [Théorème de Bessel–Parseval] *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, *continue par morceaux et* T*-périodique. On a :*

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 \, dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

Lorsque la f *est une fonction réelle, cela s'écrit encore*

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 \, dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right).$$

Démonstration. La décomposition orthogonale

$$f = S_n(f) + (f - S_n(f)) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ik\omega x} + (f - S_n(f))$$

donne, par le théorème de Pythagore

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2 .$$

On fait tendre n vers l'infini, en remarquant que 5.11, $\|f - S_n(f)\|_2^2 \to 0$, par le théorème précédent. □