Séries numériques.

Exercice 1 : Calculer la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)} \qquad \sum_{n\geq 3}\frac{2n-1}{n(n^2-4)}$$

Exercice 2 : En utilisant l'identité $\displaystyle\frac{1}{3n+1}=\int_0^1 t^{3n}\,dt$, montrez que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 3 : En utilisant l'identité $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, montrez que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$$

est convergente, et calculez sa somme.

Exercice 4 : On se propose dans cet exercice de démontrer la formule de Bailey, Borwein et Plouffe, qui permet de calculer un chiffre du developpement hexadécimal de π sans calculer tous les chiffres précédents :

$$\pi=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{8n+1}-\frac{2}{8n+4}-\frac{1}{8n+5}-\frac{1}{8n+6}\right)\frac{1}{16^n}.$$

Les formules de ce type sont faciles à vérifier. La difficulté est de les obtenir.

1. En utilisant l'identité $\frac{1}{\alpha}=\int_0^1 t^{\alpha-1}dt$ $(\alpha\neq 1)$, montrer que pour tout entier $p\geq 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{8n+p}\frac{1}{16^n}=\int_0^1\frac{t^{p-1}}{1-\frac{t^8}{16}}.$$

2. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{8n+1}-\frac{2}{8n+4}-\frac{1}{8n+5}-\frac{1}{8n+6}\right)\frac{1}{16^n}=\int_0^1\frac{4-2t^3-t^4-t^5}{1-\frac{t^8}{16}}dt\cdot$$

3. Terminer la démonstration en utilisant la décomposition en éléments simples suivante

$$\frac{4-2t^3-t^4-t^5}{1-\frac{1}{16}t^8}=\frac{4t}{t^2-2}+\frac{8-4t}{t^2-2t+2}.$$

Exercice 5 : 1) Appliquer la formule de Taylor Lagrange à la fonction exponentielle entre 0 et 1. En déduire que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{n!} \cdots$$

2) Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ (on écrira $n^2 = n(n-1) + n$).

3) Montrer que le reste d'ordre n de la série exponentielle, $R_n = \sum_{k>n} \frac{1}{k!}$, est majoré par $\dfrac{1}{nn!}$. En déduire que e est un nombre irrationnel.

Exercice 6 : Donner la dérivée d'ordre n de la fonction logarithme. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à cette fonction, montrer que la série harmonique alternée

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} \cdots$$

est convergente de somme $\ln 2$.

Retrouver ce résultat en utilisant la méthode présentée dans l'exercice 2, c'est à dire en remplaçant $1/n$ par $\int_0^1 t^{n-1} dt$.

Exercice 7 : 1) En comparant la somme partielle d'ordre n de la série harmonique

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

à une intégrale montrer que H_n vérifie l'encadrement

$$\ln(n+1) < H_n < 1 + \ln(n)$$

2) En déduire que la série harmonique est divergente et que H_n est équivalent lorsque n tend vers l'infini à $\ln n$.

Exercice 8 : 1) Calculer une primitive de $1/(x \ln^2 x)$.

2) En déduire que l'intégrale impropre $\int_a^{\infty} 1/(x \ln^2 x) dx$ est convergente $(a > 1)$.

3) Soit la série de terme général

$$u_n = 1/(n \ln^2 n) \qquad\qquad n \geq 2$$

et soit S_n la somme partielle d'ordre n, $S_n = \sum_{k=2}^{k=n} u_k$. Donner un majorant de S_n ; en déduire que la série des u_n est convergente. Soit S la somme de cette série.

4) Soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{k=\infty} u_k$ le reste d'ordre n. Donner un encadrement de R_n.

5) Montrer que pour que la somme S_n approche S de moins de 0.01 il faut que n soit supérieur à 10^{43}.

5) Calculer un encadrement de R_{20} et une valeur approchée de S_{20}; en déduire une valeu approcheé de S à 3×10^{-3} près.

Exercice 9 : Soit f une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^2}$.

Exercice 10 : En utilisant les divers critères de convergence préciser la nature des séries dont le terme général u_n est donné par l'une des expressions suivantes :

$\dfrac{1}{\ln n}$	$\dfrac{1}{(\ln n)^{(\ln n)}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$
$\dfrac{(\ln n)^n}{n!}$	$\dfrac{1}{n^{2-\cos\frac{1}{n}}}$	$\dfrac{\sqrt{n(n-1)}}{n^2-2\sqrt{n}+3\ln n}$
$\dfrac{\sin(n)}{n(n+1)}$	$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^n}{1+\sqrt{t}}dt$	$\displaystyle\int_0^{1}\frac{t^n}{1+\sqrt{t}}dt$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$	$\dfrac{2^n+3^n}{n^2+\ln n+5^n}$	$e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
$\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt{n^2-1}$	$\dfrac{(n+1)!}{1.4.\ldots(3n+1)}a^n$	$\dfrac{n!}{n^n}$
$\left(1+\dfrac{(-1)^n}{2}\right)a^n$	$\left(\dfrac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}$	$\mathrm{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$
$\mathrm{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{n}\right)$	$\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{2n\ln n}$	$\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$
$\dfrac{2.4.6\ldots 2n}{n^n}$	$\dfrac{\ln 2+\ln 3+\cdots\ln n}{n^{\alpha}}$	$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1/2}}$

Exercice 11 : Etudier la convergence de la série de terme général $u_n=\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}$. En déduire que deux séries de termes généraux équivalents ne sont pas nécessairement de même nature.

Exercice 12 : Etudier la convergence simple et absolue des séries de terme général u_n :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n^3+1}} \qquad u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$$

$$u_n = \frac{1}{(-1)^n n^2+n+1} \qquad u_n = \frac{n^2}{(1+i)^n}$$

$$u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad u_n = \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$$

$$u_n = (-1)^n \left(\sqrt{1+n} - \sqrt{n}\right) \qquad u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$u_n = \left(\frac{2n(1+i)+3}{3n-i}\right)^n \qquad u_n = (-1)^n \int_0^1 t^n f(t)\,dt \text{ avec } f \in C\left([0,1]\right),\mathbb{R}).$$

Exercice 13 : Discuter selon les valeurs de $\alpha > 0$ la convergence simple et absolue de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}.$$

Exercice 14 : Discuter la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\ln n}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

selon la valeur du nombre complexe z.

Exercice 15 : Etudier la nature des séries :

$$u_n = \frac{\cos n}{n+\cos n} \qquad u_n = \frac{\cos n}{n^{1/2}+\cos n}$$

On pourra songer à utiliser la méthode de somation d'Abel, et, au besoin, utiliser un développement limité.

Exercice 16 : Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(\ln n)}{n}$ est divergente.

Indication : la divergence provient de ce que le numérateur n'oscille pas assez vite autour de 0. Montrer qu'il existe, aussi loin que l'on veut, des intervalles de grandes longueurs sur lesquels la minoration suivante est vérifiée :

$$\frac{\sin \ln n}{n} \geq \frac{1}{2n}.$$

Exercice 17 : Discuter selon la valeur de α la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^{\alpha}\sin^2 x}$

On pourra d'abord calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{n\pi-\pi/2}^{n\pi+\pi/2} \frac{dx}{1+a\sin^2 x}$ avec $a>0$.