Partitions binaires et jeu 2048.

M. Deléglise

Résumé

Le jeu de 2048 actuellement très en vogue, est une bon moyen de se familiariser avec les puissances de 2. Ces quelques pages, d'un niveau élémentaire sont destinées aux curieux qui voudraient profiter de l'occasion pour en savoir un peu plus. On s'y intéresse aux partitions des entiers en puissances de 2, ce qui fournit une agréable présentation de l'écriture des nombres en base 2, et une preuve simple de ce que le plus grand nombre pouvant apparaître sur une case du jeu 2048 est $2^{17} = 131\,072$.

1 Puissances de 2, partitions binaires

Definition 1. *La suite des puissances de* 2 *est la suite* $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$ *dont le premier terme est* 1*, et chaque terme après le premier est le double du précédent.*

Definition 2. *Une* partition binaire *d'un entier* n *est une décomposition de* n *en somme de puissances de* 2*. On appelle* longueur *d'une partition le nombre des termes composant cette somme. Dans la suite, pour alléger l'écriture, on omettra parfois l'adjectif binaire derrière le mot partition.*

Remarque On ne change pas une somme en changeant l'ordre de ses termes. On conviendra donc que $8 + 4 + 1 + 1$ et $1 + 8 + 1 + 4$ sont deux écritures d'un même partition de 14. Quand on parlera d'une partition $n = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$, il sera toujours sous-entendu que $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_k$.

Exemples de partitions binaires :

$$
\begin{aligned}
5 &= & 1 + 1 + 1 + 1 + 1 &\quad \text{(longueur 5)}\\
5 &= & 2 + 2 + 1 &\quad \text{(longueur 3)}\\
14 &= & 4 + 4 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 &\quad \text{(longueur 6)}\\
16 &= & 8 + 4 + 2 + 1 + 1 &\quad \text{(longueur 5)}\\
16 &= & 16 &\quad \text{(longueur 1)}
\end{aligned}
$$

Nous nous proposons de répondre aux questions suivantes : est-ce que tout entier positif admet une partition binaire ? Si oui, quelle est la plus grande longueur, ou la plus petite longueur d'une partition binaire de n ?

Voici quelques réponses immédiates : Tout entier n admet au moins une partition binaire, par exemple la partition $n = 1+1+\ldots+1$ où le 1 apparait n fois. Cette partition est la plus longue de toutes les partitions binaires de n.

Une question plus intéressante est « Quelle est la plus petite longueur d'une partition binaire de n ? ». Si n est une puissance de 2 cette longueur est 1 car la somme réduite au seul terme n est une partition binaire. Mais qu'en est-il, dans le cas général ? Commençons par remarquer qu'une partition de longueur minimale est nécessairement formée de termes tous distincts.

Proposition 1. *Soit P une partition binaire de n dont deux termes sont identiques. Il existe une partition binaire de n, plus courte que P, dont tous les termes sont distincts. Pour abréger on emploiera l'expression* partition sans répétition *pour désigner une telle partition.*

Démonstration. Soit p une puissance de 2 figurant au moins 2 fois dans P :

$$n = p_1 + p_2 + \ldots + p + p + \ldots + p_k.$$

En remplaçant les deux termes p par un unique terme $2p$ qui est aussi une puissance de 2, on obtient une partition binaire de n, plus courte que P. Et, tant que les termes de la partition obtenue ne sont pas tous distincts, on recommence. □

Exemple Considérons $n = 14$ et la partition binaire $14 = 4 + 4 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1$. En écrivant

$$\begin{aligned} 14 &= 4+4+2+1+1+1+1 = 8+2+1+1+1+1 = 8+2+2+1+1 \\ &= 8+2+2+2 = 8+4+2 \end{aligned}$$

on obtient la partition sans répétition de longueur 3, $14 = 8 + 4 + 2$.

Proposition 2. *Soit p une puissance de 2. La somme de toutes les puissances de 2 strictement plus petites que p est $p - 1$.*

Démonstration. Vérifions le sur un exemple, $p = 32$. Notons S la somme de toutes les puissances de 2 plus petites que 32.

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16.$$

Calculons $S + 1$:

$$\begin{aligned} S + 1 &= 1+1+2+4+8+16 = 2+2+4+8+16 \\ &= 4+4+8+16 = 8+8+16 = 16+16 = 32. \end{aligned}$$

D'où $S = 32 - 1$. □

Vu la proposition 1, les partitions binaires de n les plus courtes sont des partitions sans répétition. La proposition 3 nous dit qu'il n'en existe qu'une.

Proposition 3. *Soit $n \geq 1$. Il n'existe qu'une seule partition sans répétition $n = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$. On l'obtient de la manière suivante : p_1 est la plus grande puissance de 2 qui ne dépasse pas n, p_2 la plus grande puissance de 2 qui ne dépasse pas $n - p_1$, et ainsi de suite.*

Démonstration. Soit p la plus grande puissance de 2 qui ne dépasse pas n. Si p_1 était plus petit que p, les entiers $\{p_1, p_2 \ldots, p_k\}$ serait contenus dans l'ensemble des puissances de 2 plus petites que p, et, par la proposition 2, leur somme serait plus petite que p et donc plus petite que n ce qui est absurde car $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = n$.

Ceci prouve que p_1 est la plus grande puissance de 2 qui ne dépasse pas n. De la même manière, puisque $n - p_1 = p_2 + \ldots + p_k$, p_2 est la plus grande puissance de 2 qui ne dépasse pas $n - p_1$. Et, en continuant, on obtient l'unicité de la suite $p_1, \ldots, p_k$. $\square$

Exemple : la plus courte partition binaire de 21 . La plus grande puissance de 2 qui ne dépasse pas 21 est 16. On écrit $21 = 16 + 5$. La plus grande puissance de 2 qui ne dépasse pas 5 est 4. On écrite $21 = 16 + 4 + 1$ et on a fini car 1 est une puissance de 2.

2 Ecriture des entiers en base 2.

Contentons nous de l'expliquer à l'aide d'un exemple, l'écriture en base 2 de l'entier $n = 21$. On part de la représentation binaire sans répétition

$$21 = 16 + 4 + 1.$$

Ecrivons sur une ligne les puissances de 2 en partant de 16 et en décroissant jusqu'à 1. Sous cette ligne, en dessous de chaque puissance de 2 on écrit un 1 ou un 0 selon que cette puissance de 2 figure ou ne figure pas dans la partition binaire la plus courte de 21.

16	8	4	2	1
1	0	1	0	1

La suite des chiffres de la deuxième ligne 10101 est ce q'on appelle l'écriture binaire du nombre 21. Cette écriture est une abréviation de

$$1 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1.$$

Par défintion de l'écriture binaire de n, il y figure exactement autant de 1 que de termes dans la plus courte partition binaire de n. On a donc la proposition suivante.

Proposition 4. *Soit n un entier ≥ 1. La longueur de la plus courte partition binaire de n est le nombre des 1 figurant dans l'écriture en base 2 de n.*

3 Application au jeu 2048

A toute position P d'un jeu de 2048 associons l'entier S qui est la somme des entiers figurant sur la grille. Puisque ces entiers sont des puissances de 2 ils sont les termes d'une partition binaire de S.

Puisque les entiers sur la grille sont pairs S est un nombre pair. A chaque coup, le remplacement de deux cases contenant le nombre x par une seule case contenant le nombre $2x$ ne change pas la valeur de S. Ce qui la fait changer c'est le nouveau nombre 2 ou 4 ajouté par la machine. Ainsi, après chaque coup, S est augmenté de 2 ou de 4.

Proposition 5. *La plus grande puissance de* 2 *pouvant figurer sur la grille du jeu* 2048 *est le nombre* 131 072*.*

Commençons par prouver qu'il est impossible de faire apparaitre $B = 262\,144 = 2 \times 131\,072$. Les valeurs successives de la somme S vont en croissant. On s'intéresse à la dernière valeur de S, plus petite que B. Puisque la prochaine valeur de S est au moins égale à B, et puisque S est pair, on a

$$S = B - 2 \quad \text{ou} \quad S = B - 4.$$

Simplifions l'écriture des grandes puissances de 2 en adoptant la *notation exponentielle* : si k est un entier positif ou nul on note 2^k le produit $1 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2$ où le facteur 2 apparait k fois. De sorte que

$$1 = 2^0,\ 2 = 2^1,\ 4 = 2^2,\ 8 = 2^3, \ldots, B = 2^{18}.$$

Prouvons que S est différent de $B - 2$. L'égalité

$$2 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{17} = 2^{18} = B$$

prouve que $B - 2 = 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{17}$, et que la plus courte partition binaire de $B - 2$ a pour termes les 17 entiers $2^1, 2^2, \ldots, 2^{17}$. Il n'y a que 16 entiers sur la grille, leur somme ne peut donc pas être égale à $B - 2$.

Donc $S = B - 4$. L'égalité $4 + 4 + 8 + \ldots + 2^{17} = 2^{18} = B$ montre que la somme $4 + 8 + \ldots + 2^{17} = B - 4$ est la partition binaire sans répétition de $B - 4$. Puisque c'est la seule partition binaire de $B - 4$ et puisqu'elle est de longueur 16, les entiers figurant sur la grille sont ces 16 nombres. Ils sont tous distincts la partie s'arrête là.

Il est possible de faire apparaitre 131 072. L'application *android* 2048 permet à tout instant de pouvoir reculer de 20 coups. La figure ci-joint montre une position obtenue en jouant avec cette application, en un temps compris entre 15 et 20 heures. La possibilité de revenir en arrière supprime

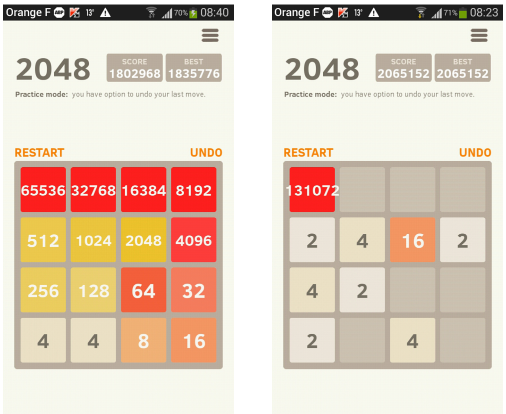

Figure 1 – Captures d’écran d’une partie aboutissant à 131 072 en utilisant abondamment les retours arrières.

tout aléa : On peut jouer le coup le plus hasardeux, en le rejouant au besoin jusqu’à ce que la machine renvoie une réponse satisfaisante.

Il est donc théoriquement possible de réaliser ce nombre 131072 au jeu ordinaire, c’est à dire le jeu où aucun retour en arrière n’est autorisé. Mais, bien entendu, en pratique, on n’obtiendra jamais ce résultat. Il faudrait une chance inouïe pour que toutes les réponses satisfaisantes obtenues après plusieurs essais dans le jeu avec recul autorisé, soient obtenues à chaque fois au premier essai lors du jeu sans recul.

Le retour arrière peut se concevoir pour permettre à un joueur de revenir sur un coup malheureux, mais si le joueur persiste en répétant ce mouvement, la machine devrait elle aussi persister en renvoyant chaque fois la même réponse.