Planche de TD numéro I

Connectez vous à l'adresse `http://sage-math.univ-lyon1.fr`. Puis cliquez sur le lien `New Worksheet`. Une feuille de travail vierge apparaît. Cliquez sur son nom `Untitled` et renommez–la exemple `TD1`. En fin de séance, n'oubliez pas de sauvegarder votre travail.
Consultez la documentation sur l'instruction `plot` (visualisation d'un graphe) en évaluant la cellule

```
plot ?
```

Consultez de même la documentation sur les fonctions `limit`, `taylor`.

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}$.

1. Affectez à la variable `f` une expression symbolique paramétrée par `x` :
```
def f(x) : return (x^2-3*x-4)/(x-2)
```
.
2. Tracez le graphe de f sur l'intervalle $[-10, 10]$ en n'affichant que les points dont l'ordonnée appartient à $[-20, 20]$.
3. Quelles sont les limites de $f(x)$ en $+\infty$, $-\infty$, 2 par valeurs supérieures, et 2 par valeurs inférieures ?
4. Quelle est la limite du rapport $\dfrac{f(x)}{x}$ quand $x \to +\infty$?
5. Quelle est la limite de $f(x) - x$ quand $x \to +\infty$?
   (a) Affectez à la variable `p1` le graphe de f sur l'intervalle $[-10, 10]$.
   (b) Affectez à la variable `p2` le graphe de l'asymptote oblique déquation $y = x - 1$ sur l'intervalle $[-10, 10]$.
   (c) Consultez la documenation sur la fonction `line`, et affectez à `p3` le segment de droite reliant les points de coordonnées $(2, -20)$ et $(2, 20)$.
   (d) Affichez ces 3 graphes sur une même figure à l'aide de la commande
   ```
   (p1+p2+p3).show(ymin=-20,ymax=20)
   ```
6. En appliquant la méthode `taylor` à l'expression `f(x)-x-1` donnez un equivalent de $f(x) - (x - 1)$ quand x tend vers l'infini.
7. Calculez $f'(x)$.
8. Retrouvez ce résultat en calculant $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Pour vous convaincre de l'égalité de l'expression obtenue avec l'expression de $f'(x)$ obtenue à la question précédente vous pourrez utilisez la méthode `simplify_rational` qui transforme une somme de fractions en une unique fraction par réduction au même dénominateur, ou encore utiliser la fonction `bool`.
9. Explicitez la dérivée seconde de f et étudiez la concavité du graphe de f. Après avoir obtenu l'expression de $f''(x)$ sous forme de fraction rationnelle vous factoriserez le numérateur et le dénomonateur de cette fraction en lui appliquant la méthode `factor`.

Exercice 2 Déclarez dans une cellule la fonction g définie par $g\ : x \mapsto \ln(2+\sin x)$.

1. Tracez le graphe de g sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$.
2. Caculez le développement limité à l'ordre 3 autour de 0 de $g(x)$, c'est à dire explicitez le polynome g_3 tel que, au voisinage de 0, on ait $g(x) = g_3(x) + o(x^3)$.
3. Tracez sur une même figure les graphes de g et de g_3 sur l'intervalle $[-\pi,\ \pi]$.

Exercice 3 Soit la fonction f la fonction $t \mapsto 0.2 \cdot t^5 - 5 \cdot t + 1$

1. Tracez le graphe de f sur $[-4, 4]$ et persuadez vous ainsi que f admet une racine réelle dans chacun des intervalles $[-3, -2]$, $[0, 1]$ et $[2, 3]$.
2. Prouvez (sans l'aide de `Sage`) en n'utilisant que des majorations triviales ques les zéros réels de f sont tous dans l'intervalle $[-3, 3]$.
3. Construisez la liste des $f(t)$ pour t dans `[-3,-2,-1,0,1,2,3]` à l'aide d'une instruction `for`. Comment en déduisez vous une preuve de ce que vous avez constaté en traitant la question 1 ?
4. Avez vous prouvé que ce sont les seuls zéros réels de g ?

Exercice 4 Soit $f(x) = (3x^2 + 2)\sqrt{1 + 5x^2}$

1. Calculez $f'(x)$.
2. Affectez à la variable `delta` le taux d'accroissement $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Puis calulez la limite de δ lorsque h tend vers 0. Retrouvez ainsi la valeur $f'(x)$.
3. Retrouvez encore ce résultat en définissant `u = 3*x^2+2 ; v = sqrt(1+5*x^2)` puis en utilisant la règle de dérivation d'un produit

Exercice 5 Tracer le graphe de $P(x) = x^3 - 8x^2 + 13x - 6$ sur l'intervalle $[-1, 3]$.

1. Que semble mettre en évidence ce graphe ?
2. Calculer `P1 = diff(P,x)` et le pgcd de P et P_1.

Exercice 6 Soit un rectangle, dont l'un des cotés est de longeur x, inscrit dans un cercle de rayon 5.

1. Exprimez la surface du rectangle en fontion de x ? Démontrez que la surface de ce rectangle est $S = x\sqrt{100 - x^2}$.
2. Quelle est la valeur maximum de cette surface ? Que pouvez vous dire du rectangle d'aire maximale inscrit dans le cercle ?

Développement limités

Exercice 7 Retrouvez à l'aide de la méthode `taylor` les développemnts limités figurant dans vos fiches de T.D., comme, par exemple, les développements au voisinage de 0, de

$$\operatorname{sh}\left(\frac{x}{1+x}\right), \qquad \sin(\ln(1+x)), \qquad \ln(1+\sin(x)).$$

Exercice 8 Etablir l'existence et la valeur de $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{3x+5}}{1-\tan(\frac{\pi x}{4})}$.

Exercice 9 Soit $f(x) = \dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$.

1. Explicitez la partie régulièreT_4 du développement d'ordre 4 au voisinage de 0 de $\cos(x) - f(x)$.
2. Obtenez la liste des coefficients des puissances de x dans $T4$ à l'aide de la commande `T4.coeffs(x)`.
3. Construire en `Sage` la liste des équations traduisant l'annulation de ces coefficients.
4. En utilisant la commande `solve`, déterminer les réels a et b pour que $\cos x - \dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit un infiniment petit d'ordre le plus élevé possible au voisinage de 0.
5. Tracer les graphes de cos et de f sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Exercice 10 La commande `taylor(f,x,x0,n)` calcule aussi des développements asymptotiques, au voisinage d'un réel x_0 ou de l'un des points $+\infty, -\infty, \infty$.
Utilisez la pour déterminer le développement asymptotique de au voisinage de ∞ de

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1}\cdot$$