Planche de TD numéro 2

Ouvrir une feuille de travail et consultez la documentation de la commade `integrate` en évaluant la cellule

```
integrate ?
```

Exercice 1 Calculer à l'aide de `Sage` les primitives de

$$\ln(x^2+2), \quad x\sqrt{1+x}, \quad \frac{\sqrt{x^2+x}}{x^4}, \quad \frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$$
$$\frac{\tan x}{1+\tan x}, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}, \quad x+\sqrt{x^2+a^2}, \quad \frac{1}{2+\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}}$$

Exercice 2 Soit $f(x) = \dfrac{x^3+ax^2+bx+c}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$

1. Avec la commande `f.partial_fraction(x)`, décomposez la fraction rationelle $f(x)$ en éléments simples
2. Calculer une primitive de f.
3. En utilisant la fonction `solve`, déterminer a, b, c pour que les primitives de f soient des fractions rationnelles.

Exercice 3 A l'aide de `numerical_integral` calculer des valeurs approchées de

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{\log(x)}{1+x^2} \quad \text{et} \quad B = \int_0^1 \frac{\operatorname{atan}(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Quelle conjecture cela vous inspire-t-il ? Démontrez que cette conjecture est vraie.

Exercice 4 (Estimation de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par la méthode des trapèzes)

On approche l'intégrale par l'intégrale de la fonction affine qui coïncide avec f en a et b c'est à dire par l'aire du trapèze de sommets $(a,0), (b,0), (b,f(b))$ et $(a,f(a))$, soit

$$\mathrm{Tr}(f,a,b) = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Le méthode des trapèzes à l'ordre n sur $[a,b]$ consiste à subdiviser l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles de même longueur $h=(b-a)/n$ et à intégrer f sur chacun de ces intégrales par la méthode des trapèzes. Montrez que cela conduit à la formule

$$\mathrm{Trn}(f,a,b,n) = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)\right).$$

1. Rappelez la définition d'une fonction convexe (resp. concave).
2. Prouvez que $\mathrm{Tr}(f, a, b)$ est une valeur approchée par excès (resp. défaut) de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque f est convexe (resp. concave) sur $[a, b]$.
3. Ecrivez une fonction `trn(f,a,b,n=1)` qui renvoie $\mathrm{Trn}(f, a, b, n)$

Exercice 5 (Estimation de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par la méthode de la tangente)

La méthode de la tangente à l'ordre 1 consiste à remplacer la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ par la fonction constante de valeur $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Prouvez qu'on obtient la même valeur en remplaçant le graphe de f sur $[a, b]$ par sa tangente au point $(a + b)/2$.

$$\mathrm{Tg1}(f, a, b) = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Le méthode de la tangente à l'ordre n sur $[a, b]$ consiste subdiviser $[a, b]$ en n intervalles de même longueur $h = (b - a)/n$ et à intégrer f sur chacun de ces intervalles par la méthode de la tangente. Montrer que cela conduit à la formule

$$\mathrm{Tgn}(f, a, b, n) = h\sum_{k=0}^{n-1} f(a + h/2 + k * h)$$

1. Montrez que $\mathrm{Tg1}(f, a, b)$ de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une valeur par défaut (resp. excès) lorsque f est convexe (resp. concave) sur $[a, b]$.
2. Ecrivez une fonction `tgn(f,a,b,n=1)` qui calcule par la méthode de la tangente à l'ordre n une valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 6 (Estimation de $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$)

On considère donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Dans une cellule de votre feuille de travail définissez donc f par

```
def f(x) :
    if x==0 :
       return 1.0
    else :
       return sin(x)/x
```

1. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-\pi, +\pi]$.
2. En vous reposant sur la commande `limit` de `Sage` prouver que f est continue en 0.
3. Prouver de même que f est dérivable en 0, puis que la dérivée de f est continue.

4. Prouver que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et expliciter la valeur de $f''(x)$ pour $x \neq 0$. Vérifier votre calcul en utilisant la commande `diff(sin(x)/x,x,x)` Le résultat obtenu est une somme de 3 fractions.
5. Dans cette question on étudie le signe de $f''(x)$ sur $]0, \pi/2[$. Pour étudier ce signe réduisez au même dénominateur l'expression de $f''(x)$ que vous avez obtenue, en utilisant la méthode `simplify_rational`

```
diff(sin(x)/x,x,x).simplify_rational()
```

Ainsi le signe de f'' est le signe du numérateur de cette fraction, c'est à dire le signe de $g(x) = -2x\cos x - (x^2 - 2)\sin x$

```
g = numerator(diff(sin(x)/x,x,x).simplify_rational())
```

Après avoir calculé

(a) La valeur de $g(0)$.

(b) Une expression de $g'(x)$,

prouvez que f est concave (sur $[0, \pi/2]$)

6. Obtenir une valeur approchée avec 6 décimales exactes après la virgule de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}$ en calculant 2 valeurs approchées de cette intégrale, l'une au moyen de la méthode des trapèzes, l'autre au moyen de la méthode des tangentes.
7. Confirmez votre résulat en utilisant la commande sage `numerical_integral`.