

CHAPITRE 2

Les carrés et les non-carrés dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Exercice 2.1 Soit p un nombre premier impair. Déterminer $\left(\frac{p+1}{p}\right)$ et $\left(\frac{p-1}{p}\right)$.

Exercice 2.2

1. Déterminer les p premiers pour lesquels l'équation $x^2 \equiv 3 \pmod{p}$ admet au moins une solution ?
 2. Pour quels p premiers l'équation $x^2 \equiv 5 \pmod{p}$ a-t-elle des solutions ?
-

Exercice 2.3 Les nombres 131 et 263 sont premiers. Calculer $O_{263}(131)$ avec un minimum de calculs.

Exercice 2.4 Montrer que les diviseurs premiers de $4n^2 + 1$ sont de la forme $4k + 1$.

Exercice 2.5 Que peut-on dire des diviseurs premiers de $12n^2 - 1$? Et de $12n^2 + 1$?

Exercice 2.6

1. $x^2 \equiv 15 \pmod{77}$.
 2. Résoudre l'équation $x^2 + 3x + 7 \equiv 0 \pmod{115}$
-

Exercice 2.7 (La méthode de Hensel) Soit p premier impair et a non multiple de p . Démontrer que la congruence $x^2 \equiv a \pmod{p^n}$ admet des solutions si et seulement si $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, et dans ce cas, elle admet exactement 2 solutions modulo p^n .

Application : résoudre $x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{125}$.

Exercice 2.8 (Résolution de $x^2 \equiv a \pmod{2^n}$ (a impair))

1. Soit $\alpha \geq 3$, impair. Démontrer que la congruence $x^2 \equiv a \pmod{2^n}$ n'a des solutions que si $a \equiv 1 \pmod{8}$.
 2. On suppose $a \equiv 1 \pmod{8}$. Démontrer que $x^2 \equiv a \pmod{8}$ admet exactement 4 solutions modulo 8.
 3. On suppose toujours $a \equiv 1 \pmod{8}$. Démontrer par récurrence sur n que $x^2 \equiv a \pmod{2^n}$ admet exactement quatre solutions modulo 2^n et expliquer comment les obtenir.
-

Exercice 2.9 On s'intéresse à l'équation

$$x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{n}.$$

1. Soit $S(n)$ la fonction arithmétique qui associe à l'entier $n \geq 1$ le nombre de solutions modulo n de l'équation $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{n}$. Démontrer que la fonction S est une *fonction arithmétique multiplicative* c'est à dire que $S(mn) = S(m)S(n)$ chaque fois que m et n sont premiers entre eux.
2. Pour quels p premiers l'équation $x^2 + x + 1 = 0 \pmod{p}$ a-t-elle des solutions, c'est à dire tels que $S(p) > 0$.
3. Pour chacun de ces nombres premiers, discuter selon la valeur de $\alpha \geq 1$ la valeur de $S(p^\alpha)$.
4. Quels sont les entiers n pour lesquels $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ a des solutions ?
5. Quel est le nombre de solutions de

$$x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{2457}.$$

Exercice 2.10

1. Pour quels p premiers l'équation $x^2 + 6x + 1 = 0 \pmod{p}$ a-t-elle des solutions ?
2. Pour chacun de ces nombres premiers, discuter selon la valeur de $\alpha \geq 1$ le nombre de solutions de

$$x^2 + 6x + 1 \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$$

3. Quels sont les entiers n pour lesquels $x^2 + 6x + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ a des solutions ?
-

Exercice 2.11 Montrer que si q et $p = 4q + 1$ sont premiers 2 est un générateur de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.**Exercice 2.12** Montrer que si p est premier de la forme $4n + 1$ alors $n^n \equiv 1 \pmod{p}$.

Exercice 2.13 On appelle $n^{\text{ième}}$ nombre de Fermat le nombre $2^{2^n} + 1$.

1. Montrer que si un nombre premier est de la forme $2^k + 1$ alors c'est un nombre de Fermat.
2. Soit $F_n = 2^{2^n} + 1$ un nombre de Fermat. Montrer que les diviseurs premiers de F_n sont tous de la forme $k2^{n+1} + 1$ (si p est un diviseur premier de F_n , on considèrera l'ordre de 2 modulo p et on montrera qu'il est exactement 2^{n+1}).
3. En considérant le caractère quadratique de 2 modulo p montrer qu'on a un peu mieux : les diviseurs premiers de F_n sont tous de la forme $k2^{n+2} + 1$.
4. En marchant sur les traces d'Euler, en déduire que $F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297$ n'est pas premier.

Exercice 2.14 Soit $p = F_n = 2^{2^n} + 1$, avec $n \geq 1$.

1. On suppose que p est premier.
 - (a) Montrer que g est un générateur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ si et seulement si $\left(\frac{g}{p}\right) = -1$.
 - (b) Montrer que 3 est un générateur de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.
2. Ici on ne suppose pas p premier, mais seulement que

$$3^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Montrer que p est premier. Ce test de primalité pour les nombres de Fermat est le test de Pepin.

3. Ecrire en Sage les fonctions `Fermat(n)` qui rend le nombre de Fermat F_n et `SagePepin(n)` qui, utilisant le théorème de Pepin renvoie vrai ou faux selon que F_n est premier ou non.

Exercice 2.15 Soit a un élément *non nul* de \mathbb{F}_p . On se propose de démontrer que, pour $x \in \mathbb{F}_p$, les évènements *x est un carré non nul* et *$x + a$ est un carré non nul* sont à peu près indépendants, c'est à dire que le nombre des $x \in \mathbb{F}_p$ tels que $\left(\frac{x}{p}\right) = \left(\frac{x+a}{p}\right) = 1$ est environ $\frac{p}{4}$. On note donc A_p le nombre des entiers $x \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ tels que

$$\left(\frac{x}{p}\right) = \left(\frac{x+a}{p}\right) = 1.$$

1. Dans le cas où $a = 1$ calculer A_7 .
2. On pose $S_p = \sum_{x=0}^{p-1} \left[1 + \left(\frac{x}{p}\right)\right] \left[1 + \left(\frac{x+a}{p}\right)\right]$. Montrer que

$$S_p = 4A_p + 2 + \left(\frac{a}{p}\right) + \left(\frac{-a}{p}\right).$$

3. On est ainsi ramené au calcul de S_p . Montrer que

$$S_p = p + \sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{x(x+a)}{p}\right).$$

4. Pour $1 \leq x \leq p-1$, soit y l'inverse de x modulo p . Montrer que

$$\left(\frac{x(x+a)}{p} \right) = \left(\frac{1+ay}{p} \right).$$

5. En déduire que $S_p = p-1$, puis la valeur de A_p , et enfin l'encadrement

$$\frac{p-5}{4} \leq A_p \leq \frac{p-1}{4}.$$

Exercice 2.16 Pour tout entier $n \geq 1$ on note $r_3(n)$ le nombre de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $n = x^2 + y^2 + z^2$.

1. Démontrer que $r_3(n) = 0$ lorsque $n \equiv 7 \pmod{8}$
2. Démontrer que $r_3(4n) = r_3(n)$ pour tout n .
3. En déduire que les entiers n de la forme $n = 4^a(8b+7)$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ ne peuvent pas s'écrire comme une somme de 3 carrés.

Gauss a démontré que ces entiers sont les seuls qui ne peuvent pas s'écrire comme une somme de 3 carrés.

Exercice 2.17 (D'après la rubrique de problèmes mathématiques du *Monde*)

Soit (a_1, a_2, \dots, a_m) une suite finie d'entiers. On définit la fonction f qui à tout entier x associe l'entier y défini de la façon suivante : on multiplie a_1 par x et on ajoute a_2 . On multiplie le résultat par x et on ajoute a_3 , et ainsi de suite, le calcul se terminant après la multiplication par a_{m-1} suivie de l'ajout de a_m .

On suppose que $f(1) = 2$. Le nombre $f(7)$ est-il un carré parfait ?

Exercice 2.18 (Calcul d'une racine carrée modulo p)

On donne dans cet exercice un algorithme efficace de calcul des racines carrées de a dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ lorsque p est premier impair.

1. Dans la cas ou $p \equiv 3 \pmod{4}$ cet algorithme est particulièrement simple. Soit a un carré modulo p . Démontrer que $a^{\frac{p+1}{4}}$ est un racine carrée de a .
2. A partir de maintenant p est un nombre premier impair quelconque. Expliquer comment, en pratique, on peut trouver rapidement un entier b qui ne soit pas un carré modulo p . On choisit un tel entier. On considère alors l'ensemble E des couples (e_1, e_2) satisfaisant

$$a^{e_1} b^{e_2} \equiv 1 \pmod{p}. \tag{2.1}$$

3. Montrer que $\left(\frac{p-1}{2}, 0\right) \in E$
4. Montrer que si $(e_1, e_2) \in E$ alors e_2 est pair.
5. Montrer que si $(e_1, e_2) \in E$ et si e_1 est impair alors

$$x = a^{\frac{e_1+1}{2}} b^{\frac{e_2}{2}}$$

est une racine carrée de a modulo p .

6. Soit $(e_1, e_2) \in E$ avec e_1 pair. Soit $u = a^{\frac{e_1}{2}} b^{\frac{e_2}{2}}$. Que pouvez vous dire de u^2 ? En déduire un couple $(e'_1, e'_2) \in E$ avec $e'_1 = e_1/2$.
7. En déduire un algorithme de calcul d'une racine carrée de a modulo p . Analyser la complexité de cet algorithme dans le pire des cas, c'est à dire le nombre maximum d'opérations à effectuer pour obtenir ainsi une racine carrée de a . Que se passe-t-il lorsque p est de la forme $p = 4k + 3$?.

Exercice 2.19 (Racines carrées et factorisation)

$N = pq$ est le produit de deux nombres premiers impairs p et q .

1. On suppose connues p et q . Montrer peut-on résoudre efficacement l'équation $x^2 \equiv a \pmod{N}$ à l'aide du théorème des restes chinois et de l'exercice précédent. Ceci prouve que le problème du calcul des racines carrées modulo N n'est pas plus difficile que le problème de la factorisation de N .
 2. Dans cette question on montre que le problème du calcul des racines carrées modulo N est aussi difficile que la factorisation de N . Pour cela supposons qu' Alice dispose d'un oracle à qui l'on peut poser autant de fois que l'on veut la question : *a est un carré modulo N. Donnez moi une racine carrée de a modulo N*, et qui répond à chaque fois en renvoyant l'une des racines carrées de a modulo N .
Expliquez comment, à l'aide cet oracle peut facilement factoriser N .
-

Exercice 2.20

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on note $r_3(n)$ le nombre de triplets $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3$ tels que

$$n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

1. Démontrer que si $n \equiv 7 \pmod{8}$, $r_3(n) = 0$.
2. Démontrer que $r_3(4n) = r_3(n)$.
3. En déduire que si $n = 4^a(8b + 7)$ où $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, alors n n'est pas une somme de 3 carrés.

Gauss a démontré la réciproque : tout entier naturel n qui n'est pas de la forme $n = 4^a(8b + 7)$ est une somme de 3 carrés.
