CHAPITRE 3

Séries de Dirichlet, produits eulériens, fonctions arithmétiques, nombres premiers

Dans toute cette fiche

1. *μ représente la fonction de Möbius.*
2. *φ la fonction d'Euler : $\varphi(n) = \sum_{1 \leq m \leq n,\ (m,n)=1} 1$.*
3. *$d(n) = \sum_{d|n} 1$ le nombre des diviseurs de l'entier n.*
4. *$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ la somme des diviseurs de l'entier n.*
5. *Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $\pi(x)$ le nombre des entiers premiers $p \leq x$.*

Exercice 3.1 Soit la série de Dirichlet $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, d'abscisse de convergence σ_c, et $s_0 \in \mathbb{C}$ tel que cette série converge pour $s = s_0$.

1. Soit $s \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0) + 1$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{n^s}\right|$ est convergente.
2. En déduire que l'abscisse de convergence absolue σ_a est inférieure ou égale à $\sigma_c + 1$.

Exercice 3.2 Déterminer les abscisses de convergence et de convergence absolue de

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$?
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad \text{avec } a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 3.3 Soit ζ la fonction de Riemann. On rappelle que, pour $Re(s) > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

1. En comparant la somme à une intégrale prouver que, pour $1 < x$ on a
$$\frac{1}{x-1} < \zeta(s) < 1 + \frac{1}{x-1}$$
2. On admet que la fonction ζ de Riemann se prolonge en une fonction méromorphe dans le complexe dont le seul pôle est $s = 1$. Quel est le résidu de ζ en ce pôle ?

Exercice 3.4 Montrer que la fonction arithmétique f définie par $f(n) = (-1)^{n+1}$ pour $n \geq 1$ est multiplicative. Soit g l'inverse de f pour la convolution. Expliciter $g(p^\alpha)$ pour p premier et $\alpha \in \mathbb{N}$ puis $g(n)$ pour un entier $n \geq 1$ quelconque.

Exercice 3.5 $\Omega(n)$ est le nombre des facteurs premiers de n, *comptés avec leur ordre de multiplicité* c'est à dire

$$\Omega(n) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i, \text{ si } n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}.$$

La *fonction de Liouville* est la fonction λ définie par $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$. Montrer que λ est une fonction complètement multiplicative, et que le produit de convolution $\lambda \star \mathbf{1}$ est la fonction caractéristique des carrés c'est à dire que

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = 1 \text{ si et seulement si } n \text{ est un carré.}$$

Exercice 3.6 Soit λ la fonction de Liouville défine dans l'exercice précédent. Déterminer l'abscisse de convergence absolue de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}$. Transformer la somme en un produit eulérien et montrer que pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}.$$

Exercice 3.7

1. Montrer que la fonction d est le produit de convolution d'une fonction très simple par elle même.
2. En utilisant le théorème relatif à la série de Dirichlet d'un produit de convolution démontrer que l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}$$

est inférieure ou égale à 1 et que, pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ la somme de cette série de Dirichlet est $\zeta(s)^2$, où ζ est la fonction ζ de Riemann.

Exercice 3.8 On note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs (positifs) de n. Démontrer que pour tout s, $\mathrm{Re}(s) > 2$, on a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-1)$$

Démontrer que l'abscisse de convergence de cette série de Dirichlet est exactement 2.

Exercice 3.9

1. Démontrer que, pour $\mathrm{Re}(s) > 2$ la série génératrice de $\varphi(n)$ est absolument convergente et que
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$
2. Retrouver ce résultat plus rapidement, en partant de l'identité
$$n = \sum_{d\mid n} \varphi(d),$$
que vous exprimerez comme une identité de convolution.
3. En utilisant la minoration $\varphi(n) \geq \dfrac{\log 2}{2} \dfrac{n}{\log n}$ montrer que l'abscisse de convergence de cette série de Dirichlet est 2.

Exercice 3.10 Soit x réel, $x > 1$. Demontrez les estimations suivantes qui seront utiles dans les exercices suivants :

1. $\log x \leq \displaystyle\sum_{d\leq x} \frac{1}{d} \leq 1 + \log x$.
2. $\displaystyle\sum_{d\geq x} \frac{1}{d^2} \leq \frac{1}{x-1}$.

Pour le point 2 on pourra comparer la somme à une intégrale ou majorer $\dfrac{1}{d^2}$ par $\dfrac{1}{d(d-1)}$.

Exercice 3.11 Montrer que, lorsque $x \to +\infty$, la quantité $\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} d(n)$, autrement dit de la valeur moyenne entre 1 et x de la fonction $d(n)$, satisfait
$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} d(n) = \log x + 0(1).$$

Exercice 3.12 Montrer que $\dfrac{\sigma(n)}{n}$ a une valeur moyenne asymptotique égale à $\dfrac{\pi^2}{6}$, c'est à dire que
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\sum_{n\leq x} \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Plus précisément montrer que $\displaystyle\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{\log x}{x}\right)$.

Exercice 3.13 (La méthode de l'hyperbole de Dirichlet)
Dans cet exercice on améliore notablement l'estimation de $\sum_{n\le x} d(n)$.

1. Montrer que $\sum_{n\le x} d(n)$ est le nombre des points à coordonées entières situés dans le quart de plan $u \ge 1, v \ge 1$ et sous l'hyperbole d'équation $uv = x$.
2. En utilisant la symétrie du graphe de l'hyperbole $uv = x$, en déduire que
$$\sum_{n\le x} d(n) = \left(2 \sum_{d\le\sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor\right) - \lfloor\sqrt{x}\rfloor^2 .$$
3. En admettant la formule d' Euler $\displaystyle\sum_{d\le x} \frac{1}{d} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)$ en déduire que
$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x} d(n) = \log x + (2\gamma - 1) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Exercice 3.14 On se propose dans cet exercice de calculer un équivalent du nombre $S(x)$ des entiers sans facteur carré, inférieurs ou égaux à x.

1. Montrer que $S(x) = \sum\limits_{n\le x} \mu^2(n)$, où μ est la fonction de Möbius.
2. Montrer que la série de Dirichlet $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s}$ converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, et que, alors
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}.$$
3. Montrer qu'il existe une unique fonction arithmétique multiplicative g telle que $\mu^2 = 1 * g$, et expliciter $g(p^\alpha)$. En déduire que $g(n) = 0$ si n n'est pas un carré, et que $g(n^2) = \mu(n)$.
4. Montrer que la série de Dirichlet de g converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 1/2$, et que, dans ce cas
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{2s}}.$$
5. Transformer la somme $\sum_{n\le x} \mu^2(n)$ en utilisant l'égalité $\mu^2 = g \star 1$, puis une permutation de l'ordre de sommation. En déduire que
$$S(x) = \frac{x}{\zeta(2)} + O(\sqrt{x}).$$

Exercice 3.15 Soit $P(n)$ le plus grand facteur premier de n. Calculer $\displaystyle\sum_{P(n)\le 5} \frac{1}{n}$.

Exercice 3.16 Soit $S := \{n \geq 1 \ : \ p|n \implies p^2|n\}$ et $S_x = \mathrm{card}\,(S \cap [1, x])$.

1. Montrer que tout élément de S s'écrit de manière unique sous la forme m^3u^2 avec m sans facteur carré.
2. En déduire que

$$S_x = \sum_{m \leq \sqrt[3]{x}} \mu(m)^2 \left\lfloor \sqrt{\frac{x}{m^3}} \right\rfloor = \sqrt{x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)^2}{m^{3/2}} + O\left(x^{1/3}\right)$$

3. En transformant la somme ci-dessus en un produit eulérien, montrer que

$$S_x \sim \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)} \sqrt{x}.$$

Exercice 3.17 Soit x un réel $x \geq 1$.

1. Montrer, par exemple en utilisant la deuxième formule d'inversion de Möbius, que $\displaystyle\sum_{n \leq x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1$.
2. En déduire que $\displaystyle\left| \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \right| \leq 1$.

Exercice 3.18
On peut démontrer relativement simplement, en utilisant le théorème des nombres premiers, que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n}$ est convergente (et réciproquement, si l'on admet que cette série est convergente, il est assez facile de prouver le théorème des nombres premiers).
En considérant la série de Dirichlet $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ démontrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0.$$

Exercice 3.19 Déterminer toutes les fonctions arithmétiques f complètement multiplicatives telles que $F = \mathbf{1} * f$ soit encore complètement multiplicative.

Exercice 3.20

1. Montrer que pour tout n on a $\varphi(n)\sigma(n) \leq n^2$.
2. Montrer que pour tout n on a $\varphi(n)d(n) \geq n$.

Exercice 3.21 On dit qu'un entier n est **abondant** si $\sigma(n) \geq 2n$. Montrer que si n est abondant et impair il admet au mois 3 facteurs premiers.

Exercice 3.22

1. Montrer que $\varphi(mn) \geq \varphi(m)\varphi(n)$, avec égalité seulement si $(m, n) = 1$.
2. Montrer que $d(mn) \leq d(m)d(n)$ avec égalité si et seulement si $(m, n) = 1$.

Exercice 3.23 Pour quelles valeurs de n le nombre des diviseurs de n est-il impair ?

Exercice 3.24 Montrer que pour tout n, $\sigma(3n - 1)$ est un multiple de 3.

Exercice 3.25 En partant de l'encadrement

$$\forall x \geq 30 \qquad 0.9\,\frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq 1.2\,\frac{x}{\log x},$$

prouver que pour tout $n \geq 30$, il existe un nombre premier compris strictement entre n et $2n$. En déduire le théorème de Bertrand :

$$\forall n \geq 2,\ \text{il existe } p \text{ premier } n < p < 2n.$$

Exercice 3.26 Est–il vrai que tout entier naturel peut être transformé en un nombre premier en modifiant uniquement un chiffre de son écriture décimale ?

Exercice 3.27 On note p_n le $n^{\text{ème}}$ nombre premier. Montrer que $p_n \sim n \log n$.

Exercice 3.28
On note p_n le $n^{\text{ème}}$ nombre premier.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n \log p_n}$ est convergente.
2. Donner un équivalent du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p_k \log p_k}$.

Exercice 3.29 Montrer que, pour $n > 1$, $n!$ n'est pas de la forme a^b avec $b > 1$.
Indication : on considèrera le plus grand premier $p \leq n$ et on utilisera le théorème de Bertrand.
