

Séries de Dirichlet, produits eulériens

Dans toute cette fiche

1. μ représente la fonction de Möbius.
 2. φ la fonction d'Euler : $\varphi(n) = \sum_{1 \leq m \leq n, (m,n)=1} 1$.
 3. $d(n) = \sum_{d|n} 1$ le nombre des diviseurs de l'entier n .
 4. $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ la somme des diviseurs de l'entier n .
 5. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $\pi(x)$ le nombre des entiers premiers $p \leq x$.
-

Exercice 4.1 Soit la série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, d'abscisse de convergence σ_c , et $s_0 \in \mathbb{C}$ tel que cette série converge pour $s = s_0$.

1. Soit $s \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0) + 1$. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n^s} \right|$ est convergente.
 2. En déduire que l'abscisse de convergence absolue σ_a est inférieure ou égale à $\sigma_c + 1$.
-

Exercice 4.2 Déterminer les abscisses de convergence et de convergence absolue de

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$?
 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ avec $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
-

Exercice 4.3 Soit ζ la fonction de Riemann. On rappelle que, pour $\operatorname{Re}(s) > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

1. En comparant la somme à une intégrale prouver que, pour $1 < x$ on a

$$\frac{1}{x-1} < \zeta(s) < 1 + \frac{1}{x-1}$$

2. On admet que la fonction ζ de Riemann se prolonge en une fonction méromorphe dans le complexe dont le seul pôle est $s = 1$. Quel est le résidu de ζ en ce pôle ?
-

Exercice 4.4 $\Omega(n)$ est le nombre des facteurs premiers de n , comptés avec leur ordre de multiplicité c'est à dire

$$\Omega(n) = \sum_{i=1}^k \alpha_i, \text{ si } n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}.$$

La fonction de Liouville est la fonction λ définie par $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$. Montrer que λ est une fonction complètement multiplicative, et que le produit de convolution $\lambda \star \mathbf{1}$ est la fonction caractéristique des carrés c'est à dire que

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = 1 \text{ si et seulement si } n \text{ est un carré.}$$

Exercice 4.5 Soit λ la fonction de Liouville définie dans l'exercice précédent. Déterminer l'abscisse de convergence absolue de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}$. Transformer la somme en un produit eulérien et montrer que pour $\text{Re}(s) > 1$ on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}.$$

Exercice 4.6

1. Montrer que la fonction d est le produit de convolution d'une fonction très simple par elle même.
2. En utilisant le théorème relatif à la série de Dirichlet d'un produit de convolution démontrer que l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}$$

est inférieure ou égale à 1 et que, pour $\text{Re}(s) > 1$ la somme de cette série de Dirichlet est $\zeta(s)^2$, où ζ est la fonction ζ de Riemann.

Exercice 4.7 On note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs (positifs) de n . Démontrer que pour tout s , $\text{Re}(s) > 2$, on a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-1)$$

Démontrer que l'abscisse de convergence de cette série de Dirichlet est exactement 2.

Exercice 4.8

1. Démontrer que, pour $\text{Re}(s) > 2$ la série génératrice de $\varphi(n)$ est absolument convergente et que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

2. Retrouver ce résultat plus rapidement, en partant de l'identité

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d),$$

que vous exprimerez comme une identité de convolution.

3. En utilisant la minoration $\varphi(n) \geq \frac{\log 2}{2} \frac{n}{\log n}$ montrer que l'abscisse de convergence de cette série de Dirichlet est 2.

Exercice 4.9 Montrer que $\frac{\sigma(n)}{n}$ a une valeur moyenne asymptotique égale à $\frac{\pi^2}{6}$, c'est à dire que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Plus précisément montrer que $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{\log x}{x}\right)$.

Exercice 4.10 On se propose dans cet exercice de calculer un équivalent du nombre $S(x)$ des entiers sans facteur carré, inférieurs ou égaux à x .

1. Montrer que $S(x) = \sum_{n \leq x} \mu^2(n)$, où μ est la fonction de Möbius.

2. Montrer que la série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s}$ converge pour $\text{Re}(s) > 1$, et que, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}.$$

3. Montrer qu'il existe une unique fonction arithmétique multiplicative g telle que $\mu^2 = 1 * g$, et expliciter $g(p^\alpha)$. En déduire que $g(n) = 0$ si n n'est pas un carré, et que $g(n^2) = \mu(n)$.

4. Montrer que la série de Dirichlet de g converge absolument pour $\text{Re}(s) > 1/2$, et que, dans ce cas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{2s}}.$$

5. Transformer la somme $\sum_{n \leq x} \mu^2(n)$ en utilisant l'égalité $\mu^2 = g * 1$, puis une permutation de l'ordre de sommation. En déduire que

$$S(x) = \frac{x}{\zeta(2)} + O(\sqrt{x}).$$

Exercice 4.11 Soit $S := \{n \geq 1 : p|n \implies p^2|n\}$ et $S_x = \text{card}(S \cap [1, x])$.

1. Montrer que tout élément de S s'écrit de manière unique sous la forme $m^3 u^2$ avec m sans facteur carré.

2. En déduire que

$$S_x = \sum_{m \leq \sqrt[3]{x}} \mu(m)^2 \left\lfloor \sqrt{\frac{x}{m^3}} \right\rfloor = \sqrt{x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)^2}{m^{3/2}} + O\left(x^{1/3}\right)$$

3. En transformant la somme ci-dessus en un produit eulérien, montrer que

$$S_x \sim \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)} \sqrt{x}.$$

Exercice 4.12

On peut démontrer relativement simplement, en utilisant le théorème des nombres premiers, que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n}$ est convergente (et réciproquement, si l'on admet que cette série est convergente, il est assez facile de prouver le théorème des nombres premiers).

En considérant la série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ démontrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0.$$
