Corrigé du devoir maison du 7 mars.

14 mars 2008

Exercice I

Les années où la comète A est visible sont les années dont le millésime x vérifie $x \equiv -2 \pmod 5$. Les années où la comète B est visible sont les années dont le millésime x vérifie $x \equiv -3 \pmod 7$. Les années où la comète C est visible sont les années dont le millésime x vérifie $x \equiv -8 \pmod{13}$. Pour que les 3 comètes soient visibles l'année de millésime x il faut et il suffit que x vérifie le système de congruences

$$\left\{\begin{array}{lll} x & \equiv & -2 \pmod 5 \\ x & \equiv & -3 \pmod 7 \\ x & \equiv & -8 \pmod{13} \end{array}\right.$$

Résolvons d'abord les systèmes élémentaires

$$\left\{\begin{array}{lll} x & \equiv & 1 \pmod 5, \\ x & \equiv & 0 \pmod 7, \\ x & \equiv & 0 \pmod{13}. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{lll} x & \equiv & 0 \pmod 5, \\ x & \equiv & 1 \pmod 7, \\ x & \equiv & 0 \pmod{13}. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{lll} x & \equiv & 0 \pmod 5, \\ x & \equiv & 0 \pmod 7, \\ x & \equiv & 1 \pmod{13}. \end{array}\right.$$

Les solutions du premier sont de la forme $91k$, à cause des 2 dernières congruences. La première congruence donne $1 \equiv 91k \equiv k \pmod 5$ et $x_1 = 91(5\ell+1) = 455\ell + 91$ soit $x_1 \equiv 91 \pmod{455}$.
Toute solution du second est de la forme $65k$, avec $65k \equiv 1 \pmod 7$, ce qui donne $2k \equiv 1 \pmod 7$, ou encore $2k \equiv 8 \pmod 7$ soit $k \equiv 4 \pmod 7$, et $x_2 = 260 \pmod{455}$.
Toute solution du troisième est de la forme $35k$, avec $35k \equiv 1 \pmod{13}$, ce qui donne $9k \equiv 1 \pmod{13}$, soit $k \equiv 3 \pmod{13}$ et et $x_3 \equiv 105 \pmod{455}$.
On en déduit la solution

$$x \equiv -2x_1 - 3x_2 - 8x_3 = -2 \times 91 - 3 \times 260 - 8 \times 105 = -1802 \equiv 18 \pmod{455}.$$

Exercice II

1. Comme n n'est pas un carré, $\sqrt{n}$ n'est pas un entier, et, pour x entier, $0 \le x < \sqrt{n}$ est équivalent à $0 \le x \le \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ (ce qui serait faux si n était un carré). Les entiers x satisfaisant $0 \le x < \sqrt{n}$ sont donc tous les entiers de 0 à $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Leur nombre est $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$, et le nombre des couples (x, y) vérifiant $0 \le x < \sqrt{n}$ et $0 \le y < \sqrt{n}$, est $\left(\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1\right)^2$.
2. Le nombre de couples (x, y) tels que $0 \le x, y < \sqrt{n}$ est donc

$$\left(\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1\right)^2 > (\sqrt{n})^2 = n.$$

D'autre part le nombre des classes modulo n est n, il existe donc deux couples distincts (u_1, v_1) et (u_2, v_2) tels que

$$av_1 - u_1 \equiv av_2 - x_2 \pmod n.$$

3. La congruence ci-dessus s'écrit encore $av = u$ avec $u = u_1 - u_2$ et $v = v_1 - v_2$. Or, il résulte de $0 \le u_1 < \sqrt{n}$ et $0 \le u_2 < \sqrt{n}$ que
$$-\sqrt{n} < u = u_1 - u_2 < \sqrt{n}.$$
De même $v = v_1 - v_2$ est dans l'intervalle $]-\sqrt{n}, +\sqrt{n}[$.

Exercice III

1. Par multiplicativité du symbole de Jacobi
$$\left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right).$$
Pour que -2 soit un carré modulo p il faut et il suffit que
   - Ou bien les symboles de Jacobi $\left(\frac{-1}{p}\right)$ et $\left(\frac{2}{p}\right)$ sont tous les deux $+1$, c'est à dire $p \equiv 1 \pmod 4$ et $p \equiv \pm 1 \pmod 8$, ou encore $p \equiv 1 \pmod 8$.
   - Ou bien les symboles de Jacobi $\left(\frac{-1}{p}\right)$ et $\left(\frac{2}{p}\right)$ sont tous les deux -1, c'est à dire $p \equiv 3 \pmod 4$ et $p \equiv \pm 3 \pmod 8$, ou encore $p \equiv 3 \pmod 8$.

   En résumé -2 est un carré modulo p si et seulement si $p \equiv 3$ ou $p \equiv 1 \pmod 8$.
2. Si $p = x^2 + 2y^2$, l'équation $x^2 \equiv -2y^2 \pmod p$ donne
$$1 = \left(\frac{x^2}{p}\right) = \left(\frac{-2y^2}{p}\right) = \left(\frac{-2}{p}\right)\left(\frac{y^2}{p}\right) = \left(\frac{-2}{p}\right).$$
Par la questio précédente $p \equiv 1$ ou $3 \pmod 8$.
3. Élevant au carré les deux termes de $av \equiv u \pmod p$ on obtient $a^2v^2 \equiv u^2 \pmod p$, puis, avec l'hypotèse sur a,
$$-2v^2 \equiv u^2 \pmod p.$$
Cela signifie qu'il existe un entier k tel que $u^2 + 2v^2 = kp$. De $u, v < \sqrt{p}$ il résulte $u^2 + 2v^2 < 3p$ et donc $k \in \{1, 2\}$.
   - Si $k = 1$, $p = u^2 + 2v^2$ est de la forme $x^2 + 2y^2$.
   - Si $k = 2$, l'égalité $u^2 + 2v^2 = 2p$ montre que u est pair, $u = 2w$, et
$$4w^2 + 2v^2 = 2p,$$
et $p = v^2 + 2w^2$ est encore de la forme $x^2 + 2y^2$.

Problème

1. Comme $h(1) \ne 0$, la fonction h admet une inverse h_1 pour la convolution, et la relation $f = g \star h$ est équivalente à $f \star h_1 = g$. Cela montre l'existence et l'unicité de g. La fonction φ est multiplicative, et donc aussi $f = 1/\varphi$. h étant complètement multiplicative est multiplicative, ainsi que son inverse h_1. Il en résulte que $g = f \star h_1$ est multiplicative.
2. L'équation $f = g \star h$, donne, en évaluant les deux termes en p,
$$\frac{1}{p-1} = g(1)h(p) + g(p)h(1) = \frac{1}{p} + g(p),$$
soit $g(p) = 1/(p-1) - 1/p = 1/(p(p-1))$.

Prouvons maintenant que, pour tout $\alpha \geq 2$ on a $g(p^\alpha) = 0$. Pour $\alpha = 2$, évaluons les deux termes de $f = g \star h$ en le nombre p^2 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{p(p-1)} &= g(1)h(p^2) + g(p)h(p) + g(p^2)h(1)\\ &= \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p(p-1)}\frac{1}{p} + g(p^2)\\ &= \frac{1}{p(p-1)} + g(p^2),\end{aligned}$$

soit $g(p^2) = 0$. Supposons démontré que $g(p^\beta) = 0$ pour $2 \leq \beta \leq \alpha$. On en déduit, en évaluant les deux termes de $f = g \star h$ au point $p^{\alpha+1}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{p^\alpha(p-1)} &= \frac{1}{p^{\alpha+1}} + \frac{1}{p(p-1)}\frac{1}{p^\alpha} + g(p^{\alpha+1})\\ &= \frac{1}{p^\alpha(p-1)} + g(p^{\alpha+1}),\end{aligned}$$

qui donne $g(p^{\alpha+1}) = 0$.

3. Pour appliquer le théorème du produit eulérien à la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s},$$

étudions la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{g(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}\right)_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ \alpha\geq 1}}$. Comme $g(p^\alpha) = 0$ pour $\alpha > 1$, on est ramené à étudier la sommabilité de la famille

$$\left(\frac{g(p)}{p^s}\right)_{p\in\mathcal{P}}$$

c'est à dire la convergence absolue de la série $\displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^{s+1}(p-1)}$, c'est à dire, en notant $\sigma = \mathrm{Re}(s)$, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^{\sigma+1}(p-1)}$, Quand p tend vers l'infini, le terme général de cette série est équivalent à

$$\frac{1}{p^{2+\sigma}}.$$

Il en resulte que, si $\sigma > -1$, cette série converge absolument. Lorsque $\mathrm{Re}(s) > -1$, on peut donc appliquer le théorème du produit eulérien. La série de Dirichlet de g est alors absolument convergente, et on a l'égalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 + \frac{1}{p^{s+1}(p-1)}\right).$$

4. Pour $s = 0$ en particulier, la série $\sum_{d=1}^{\infty} g(d)$ est absolument convergente, de somme

$$\begin{aligned}\prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1+\frac{1}{p(p-1)}\right) &= \prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}}{1-\frac{1}{p}} = \prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{1+\frac{1}{p^3}}{1-\frac{1}{p^2}}\\ &= \prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{1-\frac{1}{p^6}}{\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p^3}\right)} = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}.\end{aligned}$$

5. Pour d suffisamant grand on a $\log d \leq \sqrt{d}$ et donc $0 \leq g(d)\log d \leq g(d)\sqrt{d}$. La série

$$\sum_{d=1}^{\infty} g(d)\sqrt{d} = \sum_{d=1}^{\infty}\frac{g(d)}{d^{-1/2}}$$

est convergente, car c'est la série de Dirichlet de g au point $-1/2 > -1$. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{d=1}^{\infty} g(d)\log d$ est donc convergente.

6. L'équation $f = g \star h$ donne

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} f(n) &= \sum_{n\leq x}\sum_{d\mid n} g(d)h\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{n\leq x}\sum_{d\mid n} g(d)\frac{d}{n}\\ &= \sum_{d\leq x} g(d)\sum_{\substack{n=kd\\ n\leq x}}\frac{d}{n} = \sum_{d\leq x} g(d)\sum_{1\leq k\leq \frac{x}{d}}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

Soit $r_1(x)$ la fonction définie par

$$\sum_{1\leq n\leq x}\frac{1}{n} = \log x + r_1(x),$$

qui, d'après l'énoncé, verifie $0 \leq r_1(x) \leq 1$, pour tout x. On a obtenu

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} f(n) &= \sum_{d\leq x} g(d)\left(\log\left(\frac{x}{d}\right) + r_1\left(\frac{x}{d}\right)\right)\\ &= \log x\sum_{d\leq x} g(d) - \sum_{d\leq x} g(d)\log d + \sum_{d\leq x} g(d) r_1\left(\frac{x}{d}\right)\\ &= \log x\sum_{d\leq x} g(d) - r_2(x) + r_3(x) \qquad (1)\end{aligned}$$

en posant

$$r_2(x) = \sum_{d\leq x} g(d)\log d \leq \sum_{d=1}^{\infty} g(d)\log d \qquad (2)$$

et

$$r_3(x) = \sum_{d\leq x} g(d) r_1\left(\frac{x}{d}\right) \leq \sum_{d=1}^{\infty} g(d). \qquad (3)$$

Comme les fonctions r_2 et r_3 sont bornées, en divisant les deux membres de (1) par $\log x$, puis en faisant tendre x vers l'infini, on obtient

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sum_{n\le x} f(n)}{\log x} = \sum_{d=1}^{+\infty} g(d) = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}.$$

c'est à dire

$$\sum_{n\le x} \frac{1}{\varphi(n)} \sim_{x\to\infty} \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \log x.$$

7. La série $\sum_{d=1}^{\infty} g(d)$ étant convergente, de somme $\dfrac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}$, en remplaçant dans le second membre de l'équation (1) le terme $\log x \sum_{d\le x} g(d)$ par

$$\log x \sum_{d=1}^{\infty} g(d) - \log x \sum_{d>x} g(d) = \log x \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} - \log x \sum_{d>x} g(d)$$

on obtient

$$\sum_{n\le x} f(n) - \log x \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \quad = \quad -\sum_{d>x} g(d) \log x - r_2(x) + r_3(x).$$

Les fonctions g, r_2 et r_3 ne prenant que des valeurs positives on en déduit (en utilisant (3)) pour la dernière inégalité

$$-\sum_{d>x} g(d) \log x - r_2(x) \le \sum_{n\le x} f(n) - \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \log x \le r_3(x) \le \sum_{d=1}^{+\infty} g(d). \tag{4}$$

Pour la minoration on remarque que

$$\sum_{d>x} g(d) \log x \le \sum_{d>x} g(d) \log d$$

et cela donne avec (2)

$$\sum_{d>x} g(d) \log x + r_2(x) \le \sum_{d>x} g(d) \log d + \sum_{d\le x} g(d) \log d = \sum_{d=1}^{\infty} g(d) \log(d)$$

ou encore

$$-\sum_{d>x} g(d) \log x - r_2(x) \ge -\sum_{d=1}^{\infty} g(d) \log(d).$$

Avec (4) il vient

$$-\sum_{d=1}^{\infty} g(d) \log(d) \le \sum_{n\le x} f(n) - \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \log x \le \sum_{d=1}^{+\infty} g(d).$$