Devoir Maison

Exercice 1

On dit qu'un entier $n \geq 2$ est *abondant* si $\sigma(n) \geq 2n$, où σ est la fonction somme des diviseurs.

1. Quels sont les 3 premiers entiers abondants ?
2. Montrer qu'un nombre entier n impair et abondant a au moins 3 facteurs premiers distincts (on considèrera la fonction $\sigma(n)/n$).

Exercice 2

Soit $N = 5(n!)^2 - 1$ avec n entier ≥ 2.

1. Montrer que N possède un diviseur premier $p > n$, avec $p \not\equiv 1 \pmod 5$.
2. Montrer que $\left(\dfrac{5}{p}\right) = \left(\dfrac{p}{5}\right) = 1$.
3. Montrer que $p \not\equiv \pm 2 \pmod 5$.
4. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers $\equiv -1 \pmod 5$.
5. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers dont l'écriture en base 10 se termine par un 9.

Exercice 3

Soit p un nombre premier, différent de 2 et 3, tel qu'il existe x et y entiers naturels avec $p = 2x^2 + 3y^2$.

1. Montrer que $p \equiv 2 \pmod 3$.
2. Montrer que -6 est un carré modulo p.
3. Montrer que les symboles de Legendre suivants vérifient :
$$\left(\frac{3}{p}\right)\left(\tfrac{p}{3}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right).$$
En déduire que $\left(\dfrac{-6}{p}\right) = \left(\tfrac{p}{3}\right)\left(\dfrac{2}{p}\right)$.
4. En déduire que $p \equiv 5$ ou $11 \pmod{24}$.

Problème

$\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers. φ, σ et $\mathbb{1}$ sont les fonctions arithmétiques définies par : $\varphi(n) = \sum_{\substack{1\leq k\leq n\\(k,n)=1}} 1$ (la fonction d'Euler), $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ (somme des diviseurs) et $\mathbb{1}(n) = 1$ (fonction constante de valeur 1). L'opérateur $\star$ est la convolution des fonctions arithmétiques.

On s'intéresse ici à la fonction arithmétique $f :\ n \mapsto f(n) = \dfrac{\varphi(n)}{n}\dfrac{\sigma(n)}{n}$.

1. (a) Démontrer que f est multiplicative.
   (b) Expliciter $f(p^\alpha)$ pour p premier et $\alpha \geq 0$.
   (c) Démontrer que $f(n) \leq 1$ pour tout entier $n \geq 1$. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?
2. (a) Prouver qu'il existe une unique fonction arithmétique g telle que $f = \mathbb{1} \star g$, et que g est multiplicative.
   (b) Expliciter $g(p^\alpha)$ pour p premier et $\alpha \geq 0$.
3. (a) Pour p fixé, démontrer que la série $\sum_{\alpha=1}^{+\infty} |g(p^\alpha)|$ est convergente, et calculer sa somme.
   (b) En déduire que le théorème du produit eulérien s'applique à la série $\sum_{n=1}^{+\infty} g(n)$ et calculer la somme de cette série.
4. Prouver que la série $\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{g(g)}{d}$ est absolument convergente.
5. Pour tout $x > 1$, prouver l'égalité
$$\sum_{n \leq x} f(n) = x \sum_{d \leq 1}^{+\infty} \frac{g(d)}{d} - x \sum_{d > x} \frac{g(d)}{d} - \sum_{d \leq x} g(d) \left\{ \frac{x}{d} \right\}.$$
6. En déduire que la fonction $f(n)$ possède une moyenne asymptotique c'est à dire qu'il existe une constante C telle que, lorsque $x \to +\infty$
$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n) = C + o(1).$$
7. Prouver que $C = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2(p+1)} \right)$.
8. (Question facultative.) Préciser le résultat de la question 6 en prouvant que
$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n) = C + O\left(\frac{\log x}{x} \right).$$