Exercice 1

1. Le calcul des premières valeurs de σ montre que les trois premiers nombres abondants sont $6, 12$ et 18 en lesquels σ prend les valeurs 12, 28 et 39.
2. (a) Si p est premier impair, il est supérieur ou égal à 3. Pour $\alpha \geq 1$ on a

$$\frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} = 1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^\alpha} < \frac{1}{1-\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} < 2$$

(en utilisant la décroissance de $t \mapsto \dfrac{1}{1-\frac{1}{t}}$). Ceci prouve que lorsque n est impair et n'admet qu'un facteur premier on a $\sigma(n)/n < 3/2$.

(b) Si $n = p^\alpha q^\beta$ admet deux facteurs premiers impairs, $p < q$. la multiplicativité de σ donne

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha}\frac{\sigma(q^\alpha)}{q^\beta} < \frac{1}{1-\frac{1}{p}}\frac{1}{1-\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{3}}\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{15}{8} < 2.$$

Exercice 2

1. Soit p un facteur premier de N. Si p est inférieur ou égal à n, il divise $n!$ et aussi $N - 5(n!)^2 = -1$ ce qui est absurde. Les facteurs premiers de N sont donc plus grands que n.

   De plus, si tous les facteurs premiers de N etaient congrus à 1 modulo 5, N, lui aussi, serait congru à 1 modulo 5, ce qui est absurde, car $N = 5(n!)^2 - 1$ est congru à -1 modulo 5.

   Soit donc p un facteur premier de N qui n'est pas congru à 1 modulo 5.
2. On a alors $5(n!)^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$. D'où, en considérant les symboles de Legendre,

$$\left(\frac{5}{p}\right)\left(\frac{(n!)}{p}\right)^2 = \left(\frac{5}{p}\right) = 1.$$

   Puisque $5 \equiv 1 \pmod 4$, la loi de réciprocité quadratique donne $\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right)$ et donc $\left(\frac{p}{5}\right) = 1$. Ainsi p est un carré modulo 5 donc $p \equiv \pm 1 \pmod 5$.
3. Par définition de p, $p \not\equiv 1 \pmod 5$. Avec la question précédente cela donne $p \equiv -1 \pmod 5$. Puisque $p > n$ on a prouvé que pour tout n il existe un nombre premier plus grand que n congru à 1 modulo 5. L'ensemble des nombres premiers congrus à 1 modulo 5 est donc infini.
4. Soit p premier de la forme $p = 5k - 1$. Si k est impair p est pair. Donc k est pair, $k = 2k'$ et $p = 10k' - 1$.

Exercice 3

1. x n'est pas divisible par 3, d'où $x^2 \equiv 1 \pmod 3$ et $p \equiv 2x^2 \equiv 2 \pmod 3$.

2. $2x^2 \equiv -3y^2 \pmod p$ implique $4x^2 \equiv -6y^2 \pmod p$. L'égalité des symbôles de Legendre donne
$$\left(\frac{2x}{p}\right)^2 = \left(\frac{-6}{p}\right)\left(\frac{y}{p}\right)^2$$
soit $\left(\dfrac{-6}{p}\right) = 1$.

3. La loi de réciprocité quadratique, puis le critère d'Euler applique à -1 donnent $\left(\dfrac{3}{p}\right)\left(\dfrac{p}{3}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \left(\dfrac{-1}{p}\right)$. Il en résulte
$$\left(\frac{-6}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{p}{3}\right)\left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{p}{3}\right)$$
Puisque $p \equiv 2 \pmod 3$, on a $\left(\dfrac{p}{3}\right) = -1$ et donc $\left(\dfrac{-6}{p}\right) = -\left(\dfrac{2}{p}\right)$. Avec la question 2) cela donne $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$ et donc $p \equiv 3, 5 \pmod 8$. Avec $p \equiv 2 \pmod 3$ cela donne $p \equiv 5, 11 \pmod{24}$.

Problème

1. (a) f est le produit des trois fonctions multiplicatives φ, σ et $n \mapsto 1/n^2$, donc multiplicative.

   (b) On a $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha\Big(1 - \dfrac{1}{p}\Big)$ et $\sigma(p^\alpha) = p^\alpha\Big(1 + \dfrac{1}{p} + \dots + \dfrac{1}{p^\alpha}\Big)$ et donc
$$f(p^\alpha) = \frac{\varphi(p^\alpha)}{p^\alpha}\frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} = \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\Big(1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^\alpha}\Big) = 1 - \frac{1}{p^{\alpha+1}}$$

   (c) On remarque que $f(p^\alpha) < 1$ pour tout p et tout $\alpha \geq 1$. Par multiplicativité si $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ on a $f(n) = f\Big(p_1^{\alpha_1}\Big) \dots f\Big(p_k^{\alpha_k}\Big) < 1$.

2. (a) Puisque μ est l'inverse de $\mathbb{1}$ pour la convolution l'égalité $f = g \star \mathbb{1}$ est équivalente à l'égalité $f \star \mu = g$. Ceci prouve l'existence et l'unicité de g. Puisque f et μ sont multiplicatives, $g = f \star \mu$ l'est aussi.

   (b) Par définition de la convolution
$$g(p) = \mu(1)f(p) + \mu(p)f(1) = 1 - \frac{1}{p^2} - 1 = -\frac{1}{p^2}$$
et, si $\alpha \geq 2$, puisque que $\mu(1) = 1$, $\mu(p) = -1$ et $\mu(p^3) = \mu(p^4) = \dots = 0$,
$$\begin{aligned} g(p^\alpha) &= \mu(1)f(p^\alpha) - \mu(p)f(p^{\alpha-1}) \\ &= \Big(1 - \frac{1}{p^{\alpha+1}}\Big) - \Big(1 - \frac{1}{p^\alpha}\Big) = \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\frac{1}{p^\alpha} \end{aligned}$$

3. (a) Par la question précédente $|g(p)| = \left|-\frac{1}{p^2}\right| = \frac{1}{p^2}$ et, pour $\alpha \geq 2$

$$|g(p^\alpha)| = \left|\left(1 - \frac{1}{p}\right)\frac{1}{p^\alpha}\right| = \frac{1}{p^\alpha} - \frac{1}{p^{\alpha+1}}$$

et donc

$$\sum_{\alpha=1}^{+\infty} |g(p^\alpha)| = \frac{1}{p^2} + \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3}\right) + \left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^4}\right) + \cdots = \frac{2}{p^2}.$$

(b) Par le point (a), pour chaque valeur de p fixée on a $\sum_{\alpha=1}^{+\infty} |g(p^\alpha)| = \frac{2}{p^2}$. Pour prouver la sommabilité de $(g(p^\alpha))_{\substack{\alpha\geq 1\\ p\in\mathcal{P}}}$ il reste à prouver que $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{2}{p^2}$ est sommable c'est à dire que la série $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{2}{p^2}$ est convergente. Ce qui est vrai car c'est une « série extraite » de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2}$.

Ainsi le théorème du produit eulérien s'applique à la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} g(n)$. Cette série est absolument convergente, et, de plus on a l'identité

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} g(n) &= \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 + g(p) + g(p^2) + \cdots\right) \\ &= \prod_{p\in\mathcal{P}} \left[1 - \frac{1}{p^2} + \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^3}\right) + \left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{p4}\right) + \cdots\right] = \prod_{p\in\mathcal{P}} 1 = 1.\end{aligned}$$

4. Par (3.b) la série $\sum_{n=1}^{+\infty} g(n)$ est absolument convergente. Avec la majoration $\left|\frac{g(n)}{n}\right| \leq |g(n)|$ cela donne la convergence absolue de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g(n)}{n}$.

5. Puisque $f = g \star \mathbb{1}$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} f(n) &= \sum_{n\leq x}\sum_{d|n} g(d) = \sum_{d\leq x} g(d) \sum_{\substack{n\leq x\\ n \text{ multiple de } d}} 1 = \sum_{d\leq x} g(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \\ &= \sum_{d\leq x} g(d) \left(\frac{x}{d} - \left\{\frac{x}{d}\right\}\right) = x\sum_{d\leq x} \frac{g(d)}{d} - \sum_{d\leq x} g(d) \left\{\frac{x}{d}\right\}\end{aligned}$$

Puisque la série $\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{g(d)}{d}$ est convergente on peut remplacer dans la somme ci-dessus le terme $x\sum_{d\leq x} \frac{g(d)}{d}$ par $x\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{g(d)}{d} - x\sum_{d>x} \frac{g(d)}{d}$ ce qui donne le résultat.

6. Après division par x le résultat de la question 5 donne

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x} f(n) = \sum_{d=1}^{+\infty}\frac{g(d)}{d} - \sum_{d>x}\frac{g(d)}{d} - \frac{1}{x}\sum_{d\le x} g(d)\left\{\frac{x}{d}\right\}$$

Puisque la série $\displaystyle\sum_{d=1}^{+\infty}\frac{g(d)}{d}$ est convergente on a $\displaystyle\sum_{d>x}\frac{g(d)}{d}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0.$

De même, puisque la série $\displaystyle\sum_{d=1}^{+\infty} g(d)$ est absolument convergente on peut écrire

$$\left|\frac{1}{x}\sum_{d\le x} g(d)\left\{\frac{x}{d}\right\}\right| \le \frac{1}{x}\sum_{d\le x}\left|g(d)\left\{\frac{x}{d}\right\}\right| \le \frac{1}{x}\sum_{d=1}^{+\infty}|g(d)|\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Ainsi $\displaystyle x\sum_{d>x}\frac{g(d)}{d} + \sum_{d\le x} g(d)\left\{\frac{x}{d}\right\} = o(1)$ et

$$\frac{1}{x}\sum_{d\le x} f(n) = \sum_{d=1}^{+\infty}\frac{g(d)}{d} + o(1).$$

7. Puisque la série $\displaystyle\sum_{d=1}^{+\infty}\frac{g(d)}{d}$ est absolument convergente le théorème du produit eulérien s'applique et donne, en utilisant (2.b) pour expliciter les $\dfrac{g(p^\alpha)}{p^\alpha}$

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{d=1}^{+\infty}\frac{g(d)}{d} = \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1+\sum_{\alpha=1}^{+\infty}\frac{g(p^\alpha}{p^\alpha}\right)\\
&= \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^3}+\left(\frac{1}{p^4}-\frac{1}{p^5}\right)+\left(\frac{1}{p^6}-\frac{1}{p^7}\right)+\cdots\right)\\
&= \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^3}\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}-\cdots\right)\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^3}\frac{1}{1+\frac{1}{p}}\right)\\
&= \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^3+p^2}\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1-\frac{1}{p^2(p+1)}\right)
\end{aligned}$$

8. L'égalité démontrée à la question 5 donne, après division par x

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x} f(n) = \sum_{d\le 1}^{+\infty}\frac{g(d)}{d} - \sum_{d>x}\frac{g(d)}{d} - \frac{1}{x}\sum_{d\le x} g(d)\left\{\frac{x}{d}\right\}. \tag{1}$$

Vu la question 2.(b) $|g(p)| = \dfrac{1}{p^2}$ et $|g(p^\alpha)| = \left(1-\dfrac{1}{p}\right)\dfrac{1}{p^\alpha} \le \dfrac{1}{p^\alpha}$ pour $\alpha \ge 2$. Ainsi, pour tout $\alpha \ge 1$ on a $|g(p^\alpha)| \le \dfrac{1}{p^\alpha}$. Puisque g est multiplicative on en déduit que $g(d) \leq 1/d$ pour tout d et donc aussi $g(d)/d \leq 1/d^2$ pour tout d. On a donc

$$\left|\sum_{d>x} \frac{g(d)}{d}\right| \leq \sum_{d>x} \frac{1}{d^2} = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

et

$$\frac{1}{x}\left|\sum_{d\leq x} g(d)\left\{\frac{x)}{d}\right\}\right| \leq \frac{1}{x}\sum_{d\leq x}\frac{1}{d} = O\left(\frac{\log x}{x}\right),$$

et enfin, avec (1),

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} f(n) = C + O\left(\frac{\log x}{x}\right) \cdot$$

Il y avait une erreur dans l'énoncé que je vous ai distribué, il faut y remplacer $O\left(\frac{1}{x}\right)$ par $O\left(\frac{\log x}{x}\right)$.
