

CHAPITRE 3

Séries de Dirichlet, produits eulériens, fonctions arithmétiques, nombres premiers

Dans toute cette fiche

1. μ représente la fonction de Möbius.
 2. φ la fonction d'Euler : $\varphi(n) = \sum_{1 \leq m \leq n, (m,n)=1} 1$.
 3. $d(n) = \sum_{d|n} 1$ le nombre des diviseurs de l'entier n .
 4. $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ la somme des diviseurs de l'entier n .
 5. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $\pi(x)$ le nombre des entiers premiers $p \leq x$.
-

Exercice 3.1 Soit la série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$, d'abscisse de convergence σ_c , et $s_0 \in \mathbb{C}$ tel que cette série converge pour $s = s_0$.

1. Soit $s \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0) + 1$. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n^s} \right|$ est convergente.
 2. En déduire que l'abscisse de convergence absolue σ_a est inférieure ou égale à $\sigma_c + 1$.
-

Exercice 3.2 Déterminer les abscisses de convergence et de convergence absolue de

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$?
 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ avec $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
-

Exercice 3.3 Montrer que la fonction arithmétique f définie par $f(n) = (-1)^{n+1}$ pour $n \geq 1$ est multiplicative. Soit g l'inverse de f pour la convolution. Expliciter $g(p^\alpha)$ pour p premier et $\alpha \in \mathbb{N}$ puis $g(n)$ pour un entier $n \geq 1$ quelconque.

Exercice 3.4 $\Omega(n)$ est le nombre des facteurs premiers de n , comptés avec leur ordre de multiplicité c'est à dire

$$\Omega(n) = \sum_{i=1}^k \alpha_i, \text{ si } n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}.$$

La fonction de Liouville est la fonction λ définie par $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$. Montrer que λ est une fonction complètement multiplicative, et que le produit de convolution $\lambda \star \mathbf{1}$ est la fonction caractéristique des carrés c'est à dire que

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = 1 \text{ si et seulement si } n \text{ est un carré.}$$

Exercice 3.5 Soit λ la fonction de Liouville définie dans l'exercice précédent. Déterminer l'abscisse de convergence absolue de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}$. Transformer la somme en un produit eulérien et montrer que pour $\text{Re}(s) > 1$ on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}.$$

Exercice 3.6 On se propose de démontrer que $d(n) = o(n^\delta)$. Il suffit pour cela de montrer que la suite $(d(n)/n^\delta)$ est bornée pour tout $\delta > 0$. Pourquoi ?

1. Montrer que $\frac{d(n)}{n^\delta} = \prod_{p|n} \frac{v_p(n) + 1}{p^{\delta v_p(n)}}$.
2. Montrer que si $p > 2^{1/\delta}$ on a, pour tout n , $\frac{v_p(n) + 1}{p^{\delta v_p(n)}} \leq 1$.
3. Conclure.

Exercice 3.7 On considère la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}.$$

1. Comparer les abscisses de convergence et de convergence absolue de cette série.
2. En utilisant l'exercice précédent, montrer que son abscisse de convergence est ≤ 1 .
3. Montrer que cette abscisse est exactement 1.
4. En écrivant $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} \frac{1}{n^s} \dots$, puis en regroupant différemment les termes de cette somme, démontrer que, pour $\text{Re}(s) > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2.$$

Exercice 3.8

1. Montrer que la fonction d est le produit de convolution d'une fonction très simple par elle-même.
2. À l'aide du théorème relatif à la série de Dirichlet d'un produit de convolution, retrouver plus rapidement l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet étudiée dans l'exercice précédent, ainsi que sa somme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta^2(s).$$

Dans les exercices suivants, on s'attachera à utiliser ce théorème chaque fois que possible.

Exercice 3.9 Démontrer que pour tout s , $\operatorname{Re}(s) > 2$, on a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-1)$$

Démontrer que l'abscisse de convergence de cette série de Dirichlet est exactement 2.

Exercice 3.10

1. Démontrer que, pour $\operatorname{Re}(s) > 2$ la série génératrice de $\varphi(n)$ est absolument convergente et que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

2. Retrouver ce résultat plus rapidement, en partant de l'identité

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d),$$

que vous exprimerez comme une identité de convolution.

3. En utilisant la minoration $\varphi(n) \geq \frac{\log 2}{2} \frac{n}{\log n}$ montrer que l'abscisse de convergence de cette série de Dirichlet est 2.

Exercice 3.11

Soit x réel, $x > 1$. Démontrez les estimations suivantes qui seront utiles dans les exercices suivants :

1. $\log x \leq \sum_{d \leq x} \frac{1}{d} \leq 1 + \log x.$

2. $\sum_{d \geq x} \frac{1}{d^2} \leq \frac{1}{x-1}.$

Pour le point 2 on pourra comparer la somme à une intégrale ou majorer $\frac{1}{d^2}$ par $\frac{1}{d(d-1)}$.

Exercice 3.12 Montrer que la fonction $\frac{\sigma(n)}{n}$ a une valeur moyenne asymptotique égale à $\frac{\pi^2}{6}$, c'est à dire que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Plus précisément montrer que $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{\log x}{x}\right)$.

Exercice 3.13 Montrer que, lorsque $x \rightarrow +\infty$, la quantité $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} d(n)$, autrement dit de la valeur moyenne entre 1 et x de la fonction $d(n)$, satisfait

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} d(n) = \log x + o(1).$$

Exercice 3.14 (La méthode de l'hyperbole de Dirichlet)

Dans cet exercice on améliore notablement l'estimation de $\sum_{n \leq x} d(n)$.

1. Montrer que $\sum_{n \leq x} d(n)$ est le nombre des points à coordonnées entières situés dans le quart de plan $u \geq 1, v \geq 1$ et sous l'hyperbole d'équation $uv = x$.
2. En utilisant la symétrie du graphe de l'hyperbole $uv = x$, en déduire que

$$\sum_{n \leq x} d(n) = \left(2 \sum_{d \leq \sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \right) - [\sqrt{x}]^2.$$

3. En admettant la formule d' Euler $\sum_{d \leq x} \frac{1}{d} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)$ en déduire que

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} d(n) = \log x + (2\gamma - 1) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Exercice 3.15 Donner un équivalent de $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \sigma(n)$, autrement dit de la valeur moyenne entre 1 et x de la fonction $\sigma(n)$.

Indication : Si on écrit $\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} d = \sum_{d \leq x} d \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor = \sum_{d \leq x} d \frac{x}{d} - \sum_{d \leq x} d \left\{ \frac{x}{d} \right\}$ on obtient

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = x \sum_{d \leq x} 1 - \sum_{d \leq x} d \left\{ \frac{x}{d} \right\}$$

et on n'arrive pas à conclure, car les 2 termes sont de même ordre de grandeur. On remarquera que

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} d = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \frac{n}{\frac{n}{d}}$$

Exercice 3.16 On se propose dans cet exercice de calculer un équivalent du nombre $S(x)$ des entiers sans facteur carré, inférieurs ou égaux à x .

1. Montrer que $S(x) = \sum_{n \leq x} \mu^2(n)$, où μ est la fonction de Möbius.

2. Montrer que la série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s}$ converge pour $\operatorname{Re}(s) > 1$, et que, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}.$$

3. Montrer qu'il existe une unique fonction arithmétique multiplicative g telle que $\mu^2 = 1 * g$, et expliciter $g(p^\alpha)$. En déduire que $g(n) = 0$ si n n'est pas un carré, et que $g(n^2) = \mu(n)$.

4. Montrer que la série de Dirichlet de g converge absolument pour $\operatorname{Re}(s) > 1/2$, et que, dans ce cas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{2s}}.$$

5. Transformer la somme $\sum_{n \leq x} \mu^2(n)$ en utilisant l'égalité $\mu^2 = g * 1$, puis une permutation de l'ordre de sommation. En déduire que

$$S(x) = \frac{x}{\zeta(2)} + O(\sqrt{x}).$$

Exercice 3.17 Soit $P(n)$ le plus grand facteur premier de n . Calculer $\sum_{P(n) \leq 5} \frac{1}{n}$.

Exercice 3.18 Soit $S := \{n \geq 1 : p|n \implies p^2|n\}$ et $S_x = \operatorname{card}(S \cap [1, x])$.

1. Montrer que tout élément de S s'écrit de manière unique sous la forme $m^3 u^2$ avec m sans facteur carré.

2. En déduire que

$$S_x = \sum_{m \leq \sqrt[3]{x}} \mu(m)^2 \left\lfloor \sqrt{\frac{x}{m^3}} \right\rfloor = \sqrt{x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)^2}{m^{3/2}} + O(x^{1/3})$$

3. En transformant la somme ci-dessus en un produit eulérien, montrer que

$$S_x \sim \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)} \sqrt{x}.$$

Exercice 3.19 Soit x un réel $x \geq 1$.

1. Montrer, par exemple en utilisant la deuxième formule d'inversion de Möbius, que

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1.$$

2. En déduire que $\left| \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \right| \leq 1$.

Exercice 3.20 Déterminer toutes les fonctions arithmétiques f complètement multiplicatives telles que $F = \mathbf{1} * f$ soit encore complètement multiplicative (on pourra considérer $(\mathbf{1} * f)(p^2)$).

Exercice 3.21

1. Montrer que pour tout n on a $\varphi(n)\sigma(n) \leq n^2$.
 2. Montrer que pour tout n on a $\varphi(n)d(n) \geq n$.
-

Exercice 3.22 On dit qu'un entier n est **abondant** si $\sigma(n) \geq 2n$. Montrer que si n est abondant et impair il admet au moins 3 facteurs premiers.

Exercice 3.23

1. Montrer que $\varphi(mn) \geq \varphi(m)\varphi(n)$, avec égalité seulement si $(m, n) = 1$.
 2. Montrer que $d(mn) \leq d(m)d(n)$ avec égalité si et seulement si $(m, n) = 1$.
-

Exercice 3.24 Pour quelles valeurs de n le nombre des diviseurs de n est-il pair ?

Exercice 3.25 Montrer que pour tout n , $\sigma(3n - 1)$ est un multiple de 3.

Exercice 3.26 En partant de l'encadrement de Tchebychef

$$\forall x \geq 30 \quad 0.9 \frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq 1.2 \frac{x}{\log x},$$

prouver que pour tout $n \geq 30$, il existe un nombre premier compris strictement entre n et $2n$. En déduire le théorème de Bertrand :

$$\forall n \geq 2, \text{ il existe } p \text{ premier } n < p < 2n.$$

Exercice 3.27 Est-il vrai que tout entier naturel peut être transformé en un nombre premier en modifiant uniquement un chiffre de son écriture décimale ?

Exercice 3.28

1. Montrer que la série $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p \log p}$ est convergente.

2. En utilisant le théorème des nombres premiers, donner un équivalent du reste d'ordre x , $R_x = \sum_{p > x} \frac{1}{p \log p}$.

Exercice 3.29 On note p_n le $n^{\text{ème}}$ nombre premier. Montrer que $p_n \sim n \log n$.

Exercice 3.30 En utilisant l'estimation $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + b + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log \log x}\right)$, obtenir donner un équivalent de $\sum_{n \leq x} \omega(n)$.

Exercice 3.31 En utilisant l'estimation $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + b + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log \log x}\right)$, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{C}{\log x}.$$

Le théorème de Mertens dit que la constante C est égale à $e^{-\gamma}$.

Exercice 3.32 Montrer que, pour $n > 1$, $n!$ n'est pas de la forme a^b avec $b > 1$.

Indication : on considèrera le plus grand premier $p \leq n$ et on utilisera le théorème de Bertrand.

Exercice 3.33 Soit (a_n) une suite de complexes, et f une fonction de classe C^1 sur $[1, \infty[$. On pose $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$. En vous inspirant de la démonstration donnée en cours pour la formule $\sum_{p \leq x} f(p)$, démontrer la formule sommatoire d'Abel :

$$\sum_{1 \leq n \leq x} a_n f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt$$

Exercice 3.34 Vous avez vu en cours l'estimation $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + A + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$, comme une conséquence du théorème des nombres premiers. Dans cet exercice on donne une démonstration élémentaire de ceci, c'est à dire n'utilisant pas le théorème des nombres premiers.

1. Soit $\Lambda(n) = \log p$ si $n = p^\alpha$ et $\Lambda(n) = 0$ sinon. En utilisant la formule de Legendre qui donne l'exposant de p dans la décomposition de $n!$ en facteurs premiers, transformer la somme $\sum_{n \leq x} \log n$ et montrer que

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O(1).$$

2. Montrer que

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log(x) + O(1).$$

(on pourra soustraire de cette somme la somme $\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n}$ et utiliser la question précédente).

3. En utilisant la formule sommatoire d'Abel, déduire du résultat de la question précédente :

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + b + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$