CHAPITRE 4

Fonctions arithmétiques, nombres premiers

Dans toute cette fiche

1. *μ représente la fonction de Möbius.*
2. *φ la fonction d'Euler : $\varphi(n) = \sum_{1 \leq m \leq n,\ (m,n)=1} 1$.*
3. *$d(n) = \sum_{d|n} 1$ le nombre des diviseurs de l'entier n.*
4. *$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ la somme des diviseurs de l'entier n.*
5. *Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $\pi(x)$ le nombre des entiers premiers $p \leq x$.*

Exercice 4.1 Soit $x > 0$ arbitraire.

1. Montrer, par exemple en utilisant la deuxième formule d'inversion de Möbius, que $\displaystyle\sum_{n \leq x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1$.
2. En déduire que $\displaystyle\left| \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \right| \leq 1$.

Exercice 4.2

1. Montrer que pour tout n on a $\varphi(n)\sigma(n) \leq n^2$.
2. Montrer que pour tout n on a $\varphi(n)d(n) \geq n$.

Exercice 4.3 On dit qu'un entier n est **abondant** si $\sigma(n) \geq 2n$. Montrer que si n est abondant et impair il admet au mois 3 facteurs premiers.

Exercice 4.4

1. Montrer que $\varphi(mn) \geq \varphi(m)\varphi(n)$, avec égalité seulement si $(m,n) = 1$.
2. Montrer que $d(mn) \leq d(m)d(n)$ avec égalité si et seulement si $(m,n) = 1$.

Exercice 4.5 Pour quelles valeurs de n le nombre des diviseurs de n est-il pair ?

Exercice 4.6 Montrer que pour tout n, $\sigma(3n-1)$ est un multiple de 3.

Exercice 4.7 En partant de l'encadrement de Tchebychef

$$\forall x \geq 30 \qquad 0.9\,\frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq 1.2\,\frac{x}{\log x},$$

prouver que pour tout $n \geq 30$, il existe un nombre premier compris strictement entre n et $2n$. En déduire le théorème de Bertrand :

$$\forall n \geq 2, \text{ il existe } p \text{ premier } n < p < 2n.$$

Exercice 4.8 Est–il vrai que tout entier naturel peut être transformé en un nombre premier en modifiant uniquement un chiffre de son écriture décimale ?

Exercice 4.9 Montrer que la série $\displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p\log p}$ est convergente. En utilisant le théorème des nombres premiers, donner un équivalent du reste d'ordre x, $R_x = \sum_{p>x} \frac{1}{p\log p}$. Indication : on utlisera la formule $\sum_p f(p) = \ldots$

Exercice 4.10 On note p_n le $n^{\text{ème}}$ nombre premier. Montrer que $p_n \sim n\log n$.

Exercice 4.11 En utilisant l'estimation $\displaystyle\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + b + \mathcal{O}\left(1/\log\log x\right)$, obtenir donner un équivalent de $\sum_{n\leq x} \omega(n)$.

Exercice 4.12 En utilisant l'estimation $\displaystyle\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + b + \mathcal{O}\left(1/\log\log x\right)$, montrer qu'il existe une constante c telle que

$$\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right) \sim \frac{c}{\log x}$$

Le théorème de Mertens dit que la constante c est égale à $e^{-\gamma}$.

Exercice 4.13 Montrer que, pour $n > 1$, $n!$ n'est pas de la forme a^b avec $b > 1$. Indication : on considèrera le plus grand nombre premier qui ne dépasse pas n et on utilisera le théorème de Bertrand.

Exercice 4.14 Soit (a_n) une suite de complexes, et f une fonction de classe C^1 sur $[1, \infty[$. On pose $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$. En vous inspirant de la démonstration donnée en cours pour la formule $\sum_{p \leq x} f(p)$, démontrer la formule sommatoire d'Abel :

$$\sum_{1 \leq n \leq x} a_n f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt$$

Exercice 4.15 Vous avez vu en cours l'estimation $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + A + O(1/\log x)$, comme une conséquence immédiate du théorème des nombres premiers. Dans cet exercice on donne une démonstration élémentaire de ceci, c'est à dire n'utilisant pas le théorème des nombres premiers.

1. Soit $\Lambda(n) = \log p$ si $n = p^\alpha$ et $\Lambda(n) = 0$ sinon. En utilisant la formule de Legendre qui donne l'exposant de p dans la décomposition de $n!$ en facteurs premiers, transformer la somme $\sum_{n \leq x} \log n$ et montrer que
$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O(1).$$
2. Montrer que
$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log(x) + O(1).$$
(on pourra soustraire de cette somme la somme $\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n}$ et utiliser la question précédente).
3. En utilisant la formule sommatoire d'Abel, déduire du résultat de la question précédente :
$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + b + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$
