# Examen partiel du 20 mars 2009 (corrigé).

26 mars 2009

## Exercice 1

5 n'est pas multiple de $p$, la valeur du symbole de jacobi $\left(\frac{5}{p}\right)$ est donc 1 ou $-1$, et 5 est un carré modulo $p$ si et seulement si cette valeur est 1. Par la loi de réciprocité quadratique

$$\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right)^{\frac{5-1}{2}\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{p}{5}\right).$$

On vérifie simplement que les seuls carrés non nuls modulo 5 sont 1 et 4. On a donc $\left(\frac{p}{5}\right) = 1$ si et seulement si $p \equiv 1$ ou $p \equiv 4$ modulo 5. Puisque $p$ est impair, différent de 5 il est congru modulo 10 à l'une des valeurs $1, 3, 7, 9$. Parmi ces 4 congruences seules les congruences $p \equiv 1 \pmod{10}$ et $p \equiv 9 \pmod{10}$ assurent $p \equiv 1 \pmod 5$ ou $p \equiv 4 \pmod 5$.

## Exercice 2

Puisque $92 = 4 \times 23$ avec $\text{pgcd}(23, 4) = 1$, l'équation proposée est équivalente à

$$\begin{cases} x^2 + 7 \equiv 0 \pmod 4 \\ x^2 + 7 \equiv 0 \pmod{23} \end{cases}$$

La premiere congruence s'écrit $x^2 \equiv 1 \pmod 4$ et on vérifie immédiatement que les solution sont $x \equiv \pm 1 \pmod 4$. La deuxième s'écrit $x^2 \equiv 16 \pmod{23}$. Elle admet exactement deux solutions modulo 23 car 23 est premier. Les solutions évidentes 4 et $-4$ sont donc les seules solutions. Ainsi $x$ est solution de l'équation proposée si et seulement si il est solution de l'un des 4 systèmes chinois

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 4 \\ x \equiv 4 \pmod{23} \end{cases} \quad \begin{cases} x \equiv 1 \pmod 4 \\ x \equiv -4 \pmod{23} \end{cases} \quad \begin{cases} x \equiv -1 \pmod 4 \\ x \equiv -4 \pmod{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv -1 \pmod 4 \\ x \equiv 4 \pmod{23} \end{cases}$$

Les solutions du $3^{\text{ème}}$ (resp. $4^{\text{ème}}$) système sont les opposées de celle du $1^{\text{ème}}$ (resp. $2^{\text{ème}}$). Une solution du premier est de la forme $23k + 4$. Elle est congrue à 1 modulo 4 si $23k \equiv 1 \pmod 4$, soit $k \equiv -1 \pmod 4$. Ceci fournit la solution $x = -19$. De la même façon on trouve une solution $23k - 4$ du deuxième système en choisissant $k = -1$ qui fournit la solution $x = -27$.

Les solutions sont donc $\pm 19$ et $\pm 27$ modulo 92 ou encore $19, 27, 65, 73$.
**Application** : En posant $y = x+3$ on a $x^2+6x+16 = y^2+7$. L'équation proposée s'écrit $y^2+7 \equiv 0 \pmod{92}$. Les solutions en $y$ sont $19, 27, 65, 73$ ce qui donne pour $x = y-3$ quatre valeurs modulo 92 qui sont $16, 24, 62, 70$.

# Exercice 3

1. Pour tout entier $k \geq 2$ la fonction décroissante $t \mapsto 1/t^2$ est minorée par $1/k^2$ sur l'intervalle $[k-1, k] \subset ]0, +\infty[$. On a donc
$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$
Soit $n$ entier, $n \geq 1$. Puisque $n+1 \geq 2$ on peut écrire
$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{n^2} + \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+1\right) \leq \frac{2}{n}.$$
2. Par la question précédente
$$\sum_{n>x}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=\lfloor x\rfloor+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{\lfloor x\rfloor+1} < \frac{2}{x}$$
car, par définition de $\lfloor x\rfloor$, $\lfloor x\rfloor+1 > x$.

# Problème

1. (a) $\tau(n) = \sum_{d\mid n} 1 = \sum_{d\mid n} \mathbb{1}(d) \times \mathbb{1}\left(\frac{n}{d}\right) = (\mathbb{1} \star \mathbb{1})(n)$ et donc $\tau = \mathbb{1} \star \mathbb{1}$.

   (b) On écrit
$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n\leq x} \tau(n) = \sum_{n\leq x}\sum_{d\mid n} 1 = \sum_{d\leq x}\sum_{kd\leq x} 1 = \sum_{d\leq x}\sum_{k\leq \frac{x}{d}} 1 = \sum_{d\leq x} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \\ &= \sum_{d\leq x} \frac{x}{d} - \sum_{d\leq x} \left\{\frac{x}{d}\right\} \end{aligned}$$
où $\lfloor . \rfloor$ est la fonction partie entière et $\{.\}$ la fonction partie fractionnaire. Avec la majoration $\sum_{d\leq x} \frac{1}{d} \leq 1 + \ln x$ on en déduit
$$T(x) \leq x \sum_{d\leq x} \frac{1}{d} \leq x\ln x + x,$$
et avec la minoration $\ln x \leq \sum_{d\leq x} \frac{1}{d}$ et $\left\{\frac{x}{d}\right\} \leq 1$ on en déduit
$$T(x) \geq \sum_{d\leq x} \frac{x}{d} - \sum_{d\leq x} 1 \geq x\ln x - \lfloor x\rfloor \geq x\ln x - x$$
D'où $x\ln x - x \leq T(x) \leq x\ln x + x$ soit $|T(x) - x\ln x| \leq x$.

(c) La série de Dirichlet de $\mathbb{1}$ est $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$, elle converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ et sa somme est $\zeta(s)$. Puisque $\tau = \mathbb{1} \star \mathbb{1}$, par le théorème relatif à la série de Dirichlet d'un produit de convolution la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \tau(n) n^{-s}$ est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta^2(s).$$

2. Lorsque $m$ et $n$ sont premiers entre eux $\omega(mn) = \omega(m) + \omega(n)$ et donc

$$f(mn) = 2^{\omega(mn)} = 2^{\omega(m)+\omega(n)} = 2^{\omega(m)} 2^{\omega(n)} = f(m)f(n).$$

3. (a) Notons $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 1$. Pour $\alpha \geq 1$ on a $\omega(p^\alpha) = 1$ et donc $f(p^\alpha) = 2$. La série $\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{+\infty} \frac{2}{p^{\alpha s}}$ est une série géométrique de raison $p^{-s}$, avec $|p^{-s}| = p^{-\sigma} < 1$, donc convergente, et

$$\sum_{\alpha=1}^{+\infty} \left| \frac{f(p^\alpha)}{p^{\alpha s}} \right| = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \left| \frac{2}{p^{\alpha \sigma}} \right| = \frac{2}{p^\sigma} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^\sigma}} = \frac{2}{p^\sigma - 1}.$$

et

$$\sum_{\alpha=1}^{+\infty} \frac{f(p^\alpha)}{p^{\alpha s}} = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \frac{2}{p^{\alpha s}} = \frac{2}{p^s} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \frac{2}{p^s - 1}.$$

(b) Puisque $\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{+\infty} \left| \frac{f(p^\alpha)}{p^{\alpha s}} \right| = \frac{2}{p^\sigma - 1}$ pour prouver la sommabilité de la famille il suffit de prouver que la famille $\displaystyle\left( \frac{2}{p^\sigma - 1} \right)_{p \in \mathcal{P}}$ est sommable, c'est à dire que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{p_n^\sigma - 1}$ est absolument convergente en notant $p_n$ le $n^{\text{ème}}$ nombre premier. Puisque $p_n^\sigma - 1 \sim p_n^\sigma$ cette série est de même nature que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{p_n^\sigma}$. Les inégalités $\displaystyle\frac{1}{p_n^\sigma} \leq \frac{1}{n^\sigma}$, $\sigma > 1$ et le critère de Riemann terminent la preuve.

4. Le théorème du produit eulérien s'applique donc à la fonction multiplicative $n \mapsto \displaystyle\frac{f(n)}{n^s}$ et donne pour tout $s$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \left( 1 + \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \frac{f(p^\alpha)}{p^{\alpha s}} \right) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left( 1 + \frac{2}{p^s - 1} \right) \\ &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{p^s + 1}{p^s - 1} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1 + \frac{1}{p^s}}{1 - \frac{1}{p^s}} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1 - \frac{1}{p^{2s}}}{\left( 1 - \frac{1}{p^s} \right)^2}. \end{aligned}$$

L'expression de $\zeta(s)$ en produit eulérien $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$ donne enfin $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}\cdot$ Puisque cette série converge absolument pour $\operatorname{Re}(s) > 1$ son abscisse de convergence absolue $\sigma_a$ satisfait $\sigma_a \leq 1$. Pour $s = 1$ la minoration $\frac{f(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$ prouve que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ est divergente. L'abscisse de convergence $\sigma_c$ satisfait donc $1 \leq \sigma_c$. Avec $\sigma_c \leq \sigma_a$ cela donne $1 \leq \sigma_c \leq \sigma_a \leq 1$ et $\sigma_a = \sigma_c = 1$.

5. Par définition de $g$ les valeurs non nulles de $\frac{g(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}$ sont les $-\frac{1}{p^{2s}}_{p\in\mathcal{P}}$. La famille $\left(\frac{g(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}\right)_{(p,\alpha)\in\mathcal{P}\times\mathbb{N}^\star}$ est donc sommable si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{-1}{p_n^{2s}}\right|$ est convergente ce qui est vrai car $\left|\frac{-1}{p_n^{2s}}\right| = \frac{1}{p_n^{2\operatorname{Re}(s)}} < \frac{1}{n^{2\operatorname{Re}(s)}}$ et $2\operatorname{Re}(s) > 1$. La formule du produit eulérien s'applique et donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right) = \frac{1}{\zeta(2s)}\cdot$$

6. Par le théorème relatif à la série de Dirichlet d'un produit de convolution, pour tout $s$ avec $\operatorname{Re}(s) > 1$ on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\tau\star g)(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

Vu les questions (1.c) et (5) cela donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\tau\star g)(n)}{n^s} = \zeta^2(s) \times \frac{1}{\zeta(2s)}$$

et enfin, avec la question (6), $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\tau\star g)(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}\cdot$ Les sommes des séries de Dirichlet associées aux fonctions $\tau\star g$ et $f$ coïncident pour tout $s$ tel que $\operatorname{Re}(s) > 1$. Ces fonctions sont donc identiques.

7. Pour $d$ suffisamment on a $\ln d \leq d^{1/4}$ et donc $0 \leq \frac{g(d)\ln d}{d} \leq \frac{g(d)}{d^{3/4}}\cdot$ Par la question 6 la série $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{g(d)}{d^{3/4}}$ est convergente, et donc aussi $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{g(d)\ln d}{d}\cdot$

8. (a) Puisque $f = \tau\star g$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} f(n) &= \sum_{n\leq x}\sum_{d|n} g(d)\tau\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d\leq x} g(d) \sum_{kd\leq x} \tau\left(\frac{kd}{d}\right) \\ &= \sum_{d\leq x} g(d) \sum_{k\leq \frac{x}{d}} \tau(k) = \sum_{d\leq x} g(d) T\left(\frac{x}{d}\right)\end{aligned}$$

puis en écrivant $T\left(\frac{x}{d}\right) = \frac{x}{d}\ln\left(\frac{x}{d}\right) + R\left(\frac{x}{d}\right)$

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} f(n) &= \sum_{d\le x} g(d)T\left(\frac{x}{d}\right) = \sum_{d\le x} g(d)\frac{x}{d}\ln\frac{x}{d} + \sum_{d\le x} g(d)R\left(\frac{x}{d}\right)\\ &= x\ln x\sum_{d\le x}\frac{g(d)}{d} - x\sum_{d\le x}\frac{g(d)\ln d}{d} + \sum_{d\le x} g(d)R\left(\frac{x}{d}\right)\end{aligned}$$

Par 1.b $\left|R\left(\frac{x}{d}\right)\right| \le \frac{x}{d}$, et par 5 $\sum_{d\le x}\left|\frac{g(d)}{d}\right|$ est convergente. Ainsi

$$\left|\sum_{d\le x} g(d)R\left(\frac{x}{d}\right)\right| \le \sum_{d\le x}|g(d)|\,\frac{x}{d} = x\sum_{d=1}^{+\infty}\left|\frac{g(d)}{d}\right| = O(x)$$

De même, $\left|x\sum_{d\le x}\frac{g(d)\ln d}{d}\right| \le x\sum_{d=1}^{+\infty}\left|\frac{g(d)\ln d}{d}\right| = O(x)$ et finalement

$$\sum_{n\le x} f(n) = x\ln x\sum_{d\le x}\frac{g(d)}{d} + O(x)\,.$$

(b) La fonction $g$ est multiplicative et, pour tout $p\in\mathcal{P}$ et tout $\alpha\in\mathbb{N}^\star$

$$g(p^\alpha) = \begin{cases} -1 & \text{si } \alpha = 2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Si la décompostion de $n$ en facteurs premiers est $n = \prod_{i=1}^{k} q_i^{\alpha_i}$ la multiplicativité de $g$ donne $g(n) = \prod_{i=1}^{k} g\left(q_i^{\alpha_i}\right)$. Pour que ce produit soit non nul il faut que tous les $\alpha_i$ soient égaux à 2. Cela implique que $n$ est un carré. Dans tous les cas ce produit est majoré par 1 en valeur absolue car les facteurs sont 0 ou $-1$. Autrement dit $|g(n)| \le 1$ pour tout $n$ et $g(n) = 0$ lorsque $n$ n'est pas un carré. On a donc

$$\sum_{d>x}\left|\frac{g(d)}{d}\right| = \sum_{d^2>x}\left|\frac{g(d^2)}{d^2}\right| \le \sum_{d>\sqrt{x}}\frac{1}{d^2} \le \frac{2}{\sqrt{x}}$$

(c) Vu (a) on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} f(n) &= \left(x\ln x\sum_{d\le x}\frac{g(d)}{d}\right) + O(x)\\ &= \left(x\ln x\sum_{d=1}^{+\infty}\frac{g(d)}{d}\right) - x\ln x\sum_{d>x}\frac{g(d)}{d} + O(x)\end{aligned}$$

Avec (b) on en déduit

$$\sum_{n\le x} f(n) = \left( x\ln x \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{g(d)}{d} \right) - O\left( \frac{x\ln x}{\sqrt{x}} \right) + O(x) = \frac{6}{\pi^2}\, x\ln x + O(x)\,.$$