Examen partiel du 20 mars 2009.

Durée 2h30

Les exercices 1,2,3 seront notés chacun sur 2, et le problème sur 14.

Exercice 1

Soit p un nombre premier n'appartenant pas à l'ensemble $\{2,5\}$. Prouver que 5 est un carré modulo p si et seulement si $p \equiv \pm 1 \pmod{10}$.

Exercice 2

Résoudre $x^2 + 7 \equiv 0 \pmod{92}$.
Application : Résoudre $x^2 + 6x + 16 \equiv 0 \pmod{92}$.

Exercice 3

1. Soit n un entier ≥ 1. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n}\cdot$
2. En déduire que pour tout réel $x > 0$, $\displaystyle\sum_{d>x} \frac{1}{d^2} \leq \frac{2}{x}\cdot$

Problème

$\mathbb{N}^\star$ représente l'ensemble des entiers naturels non nuls et $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $\omega(n)$ est le nombre des facteurs premiers distincts de n et $\tau(n)$ le nombre des diviseurs de n. Enfin $\mathbb{1}\ : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{C}$ est la fonction arithmétique constante de valeur 1.

1. (a) Démontrer que $\tau = \mathbb{1}\star\mathbb{1}$ (où $\star$ est l'opérateur de convolution des fonctions arithmétiques).

   (b) Soit $T(x) = \displaystyle\sum_{n\leq x} \tau(n)$. Montrer que, pour tout rél $x \geq 1$,
   $$T(x) = x \ln x + R(x) \quad \text{avec} \quad |R(x)| \leq x.$$
   On utilisera sans démonstration l'encadrement $\ln x \leq \displaystyle\sum_{d\leq x} \frac{1}{d} \leq 1 + \ln x$.

   (c) Prouver que la série de Dirichlet $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}$ converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ et que sa somme est $\zeta^2(s)$ où ζ est la fonction de Riemann.

2. Démontrer que la fonction arithmétique définie par $f(n) = 2^{\omega(n)}$ est multiplicative.

3. (a) Soit $p \in \mathcal{P}$ et $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(s) > 1$. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{+\infty} \frac{f(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}$ est absolument convergente et calculer sa somme.

   (b) En déduire que la famille $\displaystyle\left(\frac{f(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}\right)_{(\alpha, p) \in \mathbb{N}^\star \times \mathcal{P}}$ est sommable.

4. Prouver que pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ converge absolument et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}.$$

   Expliciter les abscisses de convergence absolue et de convergence de cette série.

5. Soit g l'unique fonction arithmétique multiplicative satisfaisant

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^\star \qquad g(p^\alpha) = \begin{cases} -1 & \text{si } \alpha = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Démontrer que la série de Dirichlet $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g(n)}{n^s}$ converge absolument pour tout s tel que $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$ et que, dans ce cas,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(2s)}.$$

6. Prouver que la série de Dirichlet de $\tau \star g$ converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. Quelle est la somme de cette série ? En déduire que $\tau \star g = f$.

7. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{d=1}^{\infty} \frac{g(d) \ln d}{d}$ est absolument convergente.

8. (a) Prouver que, lorsque $x \to \infty$,

$$\sum_{n \le x} 2^{\omega(n)} = x \ln x \sum_{d \le x} \frac{g(d)}{d} + O(x)\,.$$

   (b) Prouver que $|g(n)| \in \{0, 1\}$ et que $g(n) = 0$ lorsque n n'est pas un carré. En déduire à l'aide du résultat de l'exercice 3 que

$$\left| \sum_{d > x} \frac{g(d)}{d} \right| \le \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

   (c) Prouver que

$$\sum_{n \le x} 2^{\omega(n)} = \frac{6}{\pi^2}\, x \ln x + O(x)\,.$$

   On pourra utiliser sans démonstration l'égalité $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.