Examen partiel du 19 mars 2010

Les exercices 1, 2 et le problème sont deux à deux indépendants.

Exercice 1 (4 pts)

φ est la fonction d'Euler qui compte les entiers premiers avec n compris entre 1 et n et μ la fontion de Möbius.

1. La fonction arithmétique $n \mapsto \dfrac{n}{\varphi(n)}$ est-elle multiplicative, complètement multiplicative ?
2. Démontrer l'identité $\dfrac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \dfrac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}\cdot$

Exercice 2 (4 pts)

1. Soit n entier et $p \neq 3$ un facteur premier de n^2+n+1. Prouvez que -3 est un carré modulo p.
2. En utilisant le symbole de Legendre, démontrez que $p \equiv 1 \pmod 3$.
3. Soit $q_1, q_2, \dots, q_k$ des nombres premiers congrus à 1 modulo 3. Que pouvez-vous dire des diviseurs premiers de $(3q_1q_2\cdots q_k)^2 + (3q_1q_2\cdots q_k) + 1$?
4. Montrez qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 3.

Problème (12 pts)

Soit φ la fonction d'Euler. On considère la fonction arithmétique f définie par

$$f(n) = \frac{1}{\varphi(n)}\cdot$$

1. Soit $h(n) = 1/n$. Prouvez qu'il existe une unique fonction arithmétique g telle que $f = g \star h$, où $\star$ désigne le produit de convolution des fonctions arithmétiques. Prouvez que g est multiplicative.
2. Démontrez que

$$g(p) = \frac{1}{p(p-1)}, \qquad g(p^2) = 0 \quad \text{et} \quad g(p^\alpha) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \alpha \geq 2$$

en déduire que $g(n) \geq 0$ pour tout n.

3. Prouvez que la série de Dirichlet de g, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$ est absolument convergente pour $\operatorname{Re} s > -1$ et exprimez sa somme comme un produit eulérien.
4. Démontrez que la série $\displaystyle\sum_{d=1}^{\infty} g(d)$ est convergente, de somme $\dfrac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}$.
5. Montrez que la série $\displaystyle\sum_{d=1}^{\infty} g(d) \ln d$ est convergente.
6. Justifiez les égalités

$$\sum_{n \le x} f(n) = \sum_{n \le x} \sum_{d \mid n} g(d) \frac{d}{n} = \sum_{d \le x} g(d) \sum_{1 \le k \le \frac{x}{d}} \frac{1}{k},$$

et en déduire que, quand x tend vers l'infini,

$$\sum_{1 \le n \le x} f(n) = \left(\sum_{d=1}^{+\infty} g(d) \right) \log x - r_1(x) - r_2(x) + r_3(x)$$

avec

$$r_1(x) = \log x \sum_{d > x} g(d), \quad r_2(x) = \sum_{d \le x} g(d) \log d \quad \text{et} \quad r_3(x) = \sum_{d \le x} g(d) r\left(\frac{x}{d}\right)$$

et $r(u)$ défini pour tout $u \ge 1$ par $r(u) = \left(\displaystyle\sum_{1 \le k \le u} \frac{1}{k} \right) - \log u$.

7. On admettra sans démonstration que $0 \le r(u) \le 1$ pour tout u. Démontrez que

$$\sum_{1 \le n \le x} \frac{1}{\varphi(n)} = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \ln(x) + O(1),$$

c'est à dire qu'il existe une constante A telle que, pour $x \ge 1$,

$$\left| \sum_{1 \le n \le x} \frac{1}{\varphi(n)} - \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \ln(x) \right| \le A.$$