Examen partiel du 19 mars 2010

Corrigé

Exercice 1

1. Les fonctions n et $\varphi(n)$ sont multiplicatives, il en est donc de même de $n/\varphi(n)$. Cette fonction n'est pas complètement multiplicative car
$$\frac{4}{\varphi(4)} = \frac{4}{2} \neq 4 = \left(\frac{2}{\varphi(2)}\right)^2.$$
2. La fonction $n \mapsto n/\varphi(n)$ est multiplicative. La fonction $n \mapsto \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}$ est multiplicative car c'est le produit de convolution de la fonction $n \mapsto \mu^2(n)/\varphi(n)$ et de la fonction constante $\mathbb{1}$, qui sont multiplicatives. Il suffit donc d'établir l'égalité demandée pour $n = p^\alpha$ avec $\alpha \geq 1$ et p premier. Or
$$\frac{p^\alpha}{\varphi(p^\alpha)} = \frac{p^\alpha}{p^{\alpha-1}(p-1)} = \frac{p}{p-1}$$
et, puisque $\mu(p^\beta) = 0$ pour $\beta \geq 2$,
$$\sum_{d|p^\alpha} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} = \frac{\mu^2(1)}{\varphi(1)} + \frac{\mu^2(p)}{\varphi(p)} = 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1}.$$

Exercice 2

1. Puisque p divise $4n^2 + 4n + 4 = (2n+1)^2 + 3$, on a $-3 \equiv (2n+1)^2 \pmod p$ est donc -3 est un carré. Par hypothèse 3 est premier avec p, donc $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$
2. La multiplicativité du symbôle de Legendre, le critère d'Euler appliqué à -1 et enfin la loi de réciprocité quadratique donnent
$$1 = \left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}\left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right)$$
et donc $p \equiv 1 \pmod 3$.
3. Notons $n = 3q_1q_2\cdots q_k$. Soit p un facteur premier de n^2+n+1. Puisque 3 divise n il ne divise pas n^2+n+1, donc $p \neq 3$. Par la question précédente p est congru à 1 modulo 3. De plus p n'appartient pas à l'ensemble $\{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$.
4. On vient de prouver que pour tout ensemble fini $\{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$ de nombres premiers q congrus à 1 modulo 3 il existe un nombre premier congru à 1 modulo 3 qui n'appartient pas à $\{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$. Ceci prouve que l'ensemble des nombres premiers congrus à 1 modulo 3 est infini.

Problème

1. $h(1) \neq 0$. Soit donc h_1 l'inverse de h pour la convolution. La relation $f = g \star h$ est équivalente à $f \star h_1 = g$. Cela montre l'existence et l'unicité de g. Puisque h est multiplicative, h_1 l'est aussi. $f = 1/\varphi$ est multiplicative. Donc $g = f \star h_1$ est multiplicative.
2. (a) L'équation $f = g \star h$, donne, en évaluant les deux termes en p,
$$\frac{1}{p-1} = f(p) = g(1)h(p) + g(p)h(1) = \frac{1}{p} + g(p),$$
soit $g(p) = \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p(p-1)}$.

   (b) Pour $\alpha = 2$, évaluons les deux termes de $f = g \star h$ en le nombre p^2 :
$$\frac{1}{p(p-1)} = f(p^2) = g(1)h(p^2) + g(p)h(p) + g(p^2)h(1).$$
En utilisant $g(p) = 1/(p(p-1))$ que l'on vient de prouver cela donne
$$\frac{1}{p(p-1)} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p(p-1)}\frac{1}{p} + g(p^2) = \frac{1}{p(p-1)} + g(p^2),$$
soit $g(p^2) = 0$.

   (c) Supposons démontré que $g(p^\beta) = 0$ pour $2 \leq \beta \leq \alpha$. En évaluant les deux termes de $f = g \star h$ en $p^{\alpha+1}$ on en déduit
$$\begin{aligned}\frac{1}{p^\alpha(p-1)} &= f(p^{\alpha+1})\\ &= g(1)\,h(p^{\alpha+1}) + g(p)\,h(p^\alpha) + \sum_{\beta=2}^{\alpha} g(p^\beta)\,h(p^{\alpha+1-\beta}) + g(p^{\alpha+1})\,h(1)\\ &= \frac{1}{p^{\alpha+1}} + \frac{1}{p^{\alpha+1}(p-1)} + \sum_{\beta=2}^{\alpha} g(p^\beta)\,h(p^{\alpha+1-\beta}) + g(p^{\alpha+1})\\ &= \frac{1}{p^\alpha(p-1)} + g(p^{\alpha+1}),\ \text{ soit } g(p^{\alpha+1}) = 0.\end{aligned}$$

3. Pour appliquer le théorème du produit eulérien à la fonction multiplicative $n \mapsto \dfrac{g(n)}{n^s}$, prouvons que la famille $\left(\dfrac{g(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}\right)_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ \alpha\geq 1}}$ est sommable. Notons $\sigma = \mathrm{Re}(s) > -1$.

   (a) Pour chaque p fixé, puisque $g(p^\alpha) = 0$ pour $\alpha \geq 2$, on a
$$\sum_{\alpha=1}^{+\infty}\left|\frac{g(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}\right| = \left|\frac{g(p)}{p^s}\right| = \left|\frac{1}{p^{s+1}(p-1)}\right| = \frac{1}{p^{\sigma+1}(p-1)}.$$

   (b) Il reste à prouver que la série $\displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^{\sigma+1}(p-1)}$ est convergente. Cette série est « extraite » de la série
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sigma+1}(n-1)}$$

Et cette série est convergente car $\dfrac{1}{n^{\sigma+1}(n-1)} \sim \dfrac{1}{n^{\sigma+2}}$ avec $\sigma + 2 > 1$ vu l'hypothèse $\sigma > -1$.

On peut donc appliquer le théorème du produit eulérien à la série de Dirichlet de g ce qui donne la convergence absolue de cette série et l'égalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \frac{g(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 + \frac{1}{p^{s+1}(p-1)}\right),$$

puisque $g(p^\alpha) = 0$ pour $\alpha \geq 2$.

4. Puisque $0 > -1$, on déduit de la question précédente, en choisissant $s = 0$, que la série $\sum_{n=1}^{\infty} g(n)$ est absolument convergente, de somme

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} g(n) &= \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{p^2-p+1}{p(p-1)} \\
&= \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{p^3+1}{p(p^2-1)} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1+\frac{1}{p^3}}{1-\frac{1}{p^2}} \\
&= \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1-\frac{1}{p^6}}{\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p^3}\right)} = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}
\end{aligned}$$

5. Pour d suffisament grand, $\log(d) \leq \sqrt{d}$, et donc $0 \leq g(d)\ln d \leq g(d)\sqrt{d}$. La série

$$\sum_{d=1}^{\infty} g(d)\sqrt{d} = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{g(d)}{d^{-1/2}}$$

est absolument convergente, car c'est la série de Dirichlet de g au point $-1/2 > -1$. Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{d=1}^{\infty} g(d)\log d$. est donc convergente.

6. L'équation $f = g \star h$ donne

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} f(n) &= \sum_{n\leq x}\sum_{d\mid n} g(d)h\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{n\leq x}\sum_{d\mid n} g(d)\frac{d}{n} \\
&= \sum_{d\leq x} g(d) \sum_{\substack{n=kd\\ n\leq x}} \frac{d}{n} = \sum_{d\leq x} g(d) \sum_{1\leq k\leq \frac{x}{d}} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Puisque $\sum_{k\le y}\frac{1}{k}=r(y)+\log y$ pour tout y on en déduit

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} f(n) &= \sum_{d\le x} g(d)\left(\log\left(\frac{x}{d}\right)+r\left(\frac{x}{d}\right)\right)\\ &= \log x\sum_{d\le x} g(d)-\sum_{d\le x} g(d)\log d+\sum_{d\le x} g(d) r\left(\frac{x}{d}\right)\\ &= \log x\sum_{d=1}^{+\infty} g(d)-r_1(x)-r_2(x)+r_3(x) \qquad (1)\end{aligned}$$

avec

$$r_1(x)=\log x\sum_{d>x} g(d),\quad r_2(x)=\sum_{d\le x} g(d)\log d \quad \text{et} \quad r_3(x)=\sum_{d\le x} g(d) r\left(\frac{x}{d}\right)$$

7. Prouvons que $r_3(x)-r_1(x)-r_2(x)$ est bornée. Commençons par remarquer que g et r sont à valeurs positives. Il en est donc de même des fonctions r_1, r_2, r_3.
   (a) Majoration :

   $$r_3(x)-r_1(x)-r_2(x)\le r_3(x)=\sum_{d\le x} g(d) r\left(\frac{x}{d}\right)\le\sum_{d=1}^{+\infty} g(d)$$

   parce que $0\le r(x)\le 1$ pour tout x.

   (b) Pour minorer on écrit

   $$r_1(x)=\sum_{d>x} g(d)\ln x\le\sum_{d>x} g(d)\ln d$$

   puis

   $$r_1(x)+r_2(x)\le\sum_{d>x} g(d)\ln d+\sum_{d\le x} g(d)\ln d=\sum_{d=1}^{\infty} g(d)\ln(d)$$

   et donc, avec $r_3(x)\ge 0$,

   $$r_3(x)-r_1(x)-r_2(x)\ge -r_1(x)-r_2(x)\ge -\sum_{d=1}^{\infty} g(d)\ln(d),$$

et, finalement, avec les questions (4) et (6)

$$-\sum_{d=1}^{\infty} g(d)\ln(d)\le\sum_{n\le x} f(n)-\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}\ln x\le\sum_{d=1}^{+\infty} g(d).$$