Examen partiel du 18 mars 2011

Durée 2 heures

Le problème est indépendant des exercices. La question 3 de l'exercice 2 utilise le résultat de l'exercice 1.

Exercice 1 (3 pts)

On se propose de démontrer la proposition suivante : Soit $n > 0$ un entier **qui n'est pas un carré**, et $a \in \mathbb{N}$, alors il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $|u|, |v| < \sqrt{n}$ et $av \equiv u \pmod{n}$.

1. Combien y–a–t'il de couples $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leq u < \sqrt{n}, \quad 0 \leq v < \sqrt{n}$?
2. En déduire qu'il existe $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ avec
$$0 \leq u_i < \sqrt{n}, \qquad 0 \leq v_i < \sqrt{n}, \qquad av_1 - u_1 \equiv av_2 - u_2 \pmod{n}$$
3. Conclure.

Exercice 2 (4 pts)

1. Quels sont les nombres premiers impairs p tels que -2 est un carré modulo p ?
2. Soit p premier impair tel qu'il existe x et y entiers naturels avec $p = x^2 + 2y^2$. Montrez que -2 est un carré modulo p, et en déduire que $p \equiv 1$ ou $3 \pmod{8}$.
3. Réciproquement, soit p un nombre premier, $p \equiv 1$ ou $3 \pmod{8}$.
   (a) Démontrez qu'il existe un entier a, tel que $a^2 \equiv -2 \pmod{p}$, puis, en utilisant le résultat prouvé dans l'exercice 1, démontrez qu'il existe $(u, v) \neq (0, 0)$ satisfaisant $av \equiv u \pmod{p}$, avec $|u|, |v| < \sqrt{p}$.
   (b) Prouvez qu'il existe une entier k tel que $u^2 + 2v^2 = kp$, et que $k \in \{1, 2\}$, puis que p est de la forme $= x^2 + 2y^2$.

Problème (13 pts)

Soit f la fonction arithmétique définie par $f(1) = 1$, et pour $n > 1$, de décomposition en facteurs premiers $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, $f(n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \frac{3 + (-1)^{\alpha_i}}{2}$.

1. Explicitez $f(2), f(3), f(4), f(6)$. La fonction f est elle multiplicative ? complètement multiplicative ?

2. On note **1** la fonction arithmétique constante de valeur 1 et $*$ le produit de convolution des fonctions arithmétiques.
   (a) Prouvez qu'il existe une unique fonction arithmétique g telle que $f = \mathbf{1} * g$, et que g est multiplicative.
   (b) Démontrez que pour p premier $g(p) = 0$, et pour $\alpha \geq 2$, $g(p^\alpha) = (-1)^\alpha$.
3. Dans cette question on s'intéresse à la série de Dirichlet de g,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}. \tag{1}$$
   (a) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers, et $\mathbb{N}^\star$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. Prouvez que $\left(\dfrac{g(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}\right)_{p\in\mathcal{P},\,\alpha\in\mathbb{N}^\star}$ est une famille sommable pour $\mathrm{Re}(s) > 1/2$.
   (b) Prouvez que pour $\mathrm{Re}(s) > 1/2$ la série de Dirichlet (1) est absolument convergente, et, en utilisant l'identité $1 + \dfrac{z^2}{1+z} = \dfrac{1-z^3}{1-z^2}$, donnez une expression simple de sa somme au moyen de la fonction ζ de Riemann.
   (c) Prouvez que, pour tout entier $n \geq 1$, $g(n^2) = 1$. Déduisez en la valeur de l'abscisse de convergence absolue de la série (1).
4. Prouvez que
$$\sum_{n\leq x} f(n) = x \sum_{d\leq x} \frac{g(d)}{d} - \sum_{d\leq x} g(d) \left\{\frac{x}{d}\right\}$$
où la notation $\{u\}$ représente la partie fractionnaire du réel u.
5. A partir de cette question, et jusqu'à la fin de ce problème, a est un réel fixé, satisfaisant $\dfrac{1}{2} < a < 1$ et
$$A = \sum_{d=1}^{+\infty} \left|\frac{g(d)}{d^a}\right|, \qquad R_a(x) = \sum_{d>x} \left|\frac{g(d)}{d^a}\right| \quad \text{et} \quad S_a(x) = \sum_{1\leq d\leq x} \left|\frac{g(d)}{d^a}\right|$$
   (a) Démontrez que, pour tout $x \geq 1$,
$$\sum_{d>x} \left|\frac{g(d)}{d}\right| \leq \frac{R_a(x)}{x^{1-a}}.$$
   (b) Prouvez que, pour tout $x \geq 1$,
$$\left|\sum_{d\leq x} g(d)\right| \leq x^a S_a(x).$$
6. (a) En déduire qu'il existe une constante C telle que telle que
$$\left|\left(\frac{1}{x}\sum_{1\leq n\leq x} f(n)\right) - C\right| \leq \frac{A}{x^{1-a}}.$$
   (b) Donnez une expression simple de C au moyen de la fonction ζ de Riemann.