Corrigé du devoir maison.

17 mars 2009

1. Notons $g(n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} dh(d)$. L'égalité $g(n) = \sum_{d|n} h(d)\frac{1}{\frac{n}{d}}$ montre que g est le produit de convolution de la fonction multiplicative h par la fonction multiplicative $d \mapsto \frac{1}{d}$. Il en résulte que g est aussi une fonction multiplicative, et pour prouver que $g = f$ il suffit de prouver que $g(n) = f(n)$ pour tout $n = p^\alpha$ avec p premier et α entier $\alpha \geq 1$. Soit donc $n = p^\alpha$. Alors
$$\frac{1}{n}\sum_{d|n} dh(d) = \frac{1}{p^\alpha}\left(1 + p\frac{1}{p(p-1)}\right) = \frac{1}{p^\alpha}\frac{p}{p-1} = \frac{1}{p^{\alpha-1}(p-1)} = \frac{1}{\varphi(n)}.$$

2. La fonction $n \mapsto \frac{h(n)}{n^S}$ est multiplicative. Prouvons que $\left(\frac{h(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}\right)_{(p\in\mathcal{P},\alpha\geq 1)}$ est une famille sommable. Soit $\sigma = \mathrm{Re}(s) > -1$. Pour chaque valeur de p fixée le seul terme non nul de la somme $\sum_{\alpha=1}^{+\infty}\left|\frac{h(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}\right|$ est obtenu pour $\alpha = 1$. Cette somme se réduit donc à $\left|\frac{1}{p(p-1)p^s}\right| = \left|\frac{1}{p(p-1)p^\sigma}\right|$. Il reste à prouver que la famille $\sum_{p\in\mathcal{P}}\left|\frac{1}{p(p-1)p^\sigma}\right|$ est sommable. Vu $\left|\frac{1}{p(p-1)p^\sigma}\right| \sim \frac{1}{p^{\sigma+2}}$ cette somme est de même nature que la somme $\sum_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{p^{\sigma+2}}$ donc convergente puisque $\sigma+2 > 1$.

3. Pour n suffisamment grand on a $0 \leq h(n) \leq h(n)\ln n \leq h(n)\sqrt{n}$. Il suffit donc de prouver que $\sum_{n=1}^{+\infty} h(n)\sqrt{n}$ est convergente. Cela résulte de la question (2) puisque $h(n)\sqrt{n} = \frac{h(n)}{n^{-\frac{1}{2}}}$ et $-\frac{1}{2} > -1$.

4. Vu la question 1 on a
$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\frac{1}{\varphi(n)} &= \sum_{n\leq x}\sum_{d|n} h(d)\frac{d}{n} = \sum_{d\leq x} h(d)\sum_{kd\leq x}\frac{d}{kd}\\ &= \sum_{d\leq x} h(d)\sum_{d\leq\frac{x}{d}}\frac{1}{k} = \sum_{d\leq x} h(d)\Psi\left(\frac{x}{d}\right).\end{aligned}$$

5. En écrivant $\Psi(u) = \ln u + R(u)$ le résultat précédent donne

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x}\frac{1}{\varphi(n)} &= \sum_{d\le x} h(d)\ln\left(\frac{x}{d}\right) + \sum_{d\le x} h(d)R\left(\frac{x}{d}\right)\\
&= \ln x\sum_{d\le x} h(d) - \sum_{d\le x} h(d)\ln d + \sum_{d\le x} h(d)R\left(\frac{x}{d}\right)\\
&= \ln x\sum_{d=1}^{+\infty} h(d) - \ln x\sum_{d>x} h(d) - \sum_{d\le x} h(d)\ln d + \sum_{d\le x} h(d)R\left(\frac{x}{d}\right)
\end{aligned}$$

Remarquons que $h(n) \ge 0$ pour tout n. En effet si $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$, par multiplicativité $h(n)$ est le produit des $h\left(p_i^{\alpha_i}\right)$ qui sont des réels positifs ou nuls par définition de h. De plus on a $0 \le R\left(\frac{x}{d}\right) \le 1$. Il en résulte, en posant $C = \sum_{d=1}^{+\infty} h(d)$,

$$C\ln x - \ln x\sum_{d>x} h(d) - \sum_{d\le x} h(d)\ln d \le \sum_{d\le x}\frac{1}{\varphi(n)} \le C\ln x + \sum_{d=1}^{+\infty} h(d).$$

En remarquant que $\ln x\sum_{d>x} h(d) \le \sum_{d>x} h(d)\ln d$ on en déduit encore

$$C\ln x - \sum_{d=1}^{+\infty} h(d)\ln d \le \sum_{d\le x}\frac{1}{\varphi(n)} \le C\ln x + \sum_{d=1}^{+\infty} h(d)$$

En notant $A = \max\{\sum_{d=1}^{+\infty} h(d),\ \sum_{d=1}^{+\infty} h(d)\ln d\}$ on a donc

$$\left|\sum_{d\le x}\frac{1}{\varphi(n)} - C\ln x\right| \le A$$

c'est à dire $\sum_{d\le x}\frac{1}{\varphi(n)} - C\ln x = O(1)$.

6. Explicitions la valeur de C. Puisque h est multiplicative et la série $\sum_{d=1}^{+\infty} h(d)$ absolument convergente, la formule du produit eulérien s'applique et donne

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{d=1}^{+\infty} h(d) = \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1 + \sum_{\alpha=1}^{+\infty} h(p^\alpha)\right)\\
&= \prod_{p\in\mathcal{P}}\left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{p^2-p+1}{p^2-p} = \prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}}{1-\frac{1}{p}}\\
&= \prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{1+\frac{1}{p^3}}{1-\frac{1}{p^2}} = \prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{1-\frac{1}{p^6}}{\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p^3}\right)} = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}.
\end{aligned}$$