Devoir maison.

15 mars 2009

Soit $f\ :\mathbb{N}^*\to\mathbb{C}$ la fonction arithmétique définie par $f(n)=\dfrac{1}{\varphi(n)}$ où φ est la fonction d'Euler. et h l'unique fonction arithmétique multiplicative telle que pour tout premier p et tout entier $\alpha\geq 1$,

$$h(p^\alpha)=\begin{cases}\dfrac{1}{p(p-1)} & \text{si } \alpha=1\\ 0 & \text{si } \alpha>1\end{cases}$$

1. Prouver que pour tout entier $n\geq 1$ on a $f(n)=\dfrac{1}{n}\sum_{d|n} dh(d)$.
2. En utilisant le théorème du produit eulérien prouver que la série de Dirichlet
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{h(n)}{n^S}$$
est absolument convergente pour tout complexe s tel que $\mathrm{Re}(s)>-1$, et écrire le produit eulérien correspondant. Prouver que l'abscisse de convergence absolue de cette série de Dirichlet est exactement -1. Quelle est son abscisse de convergence ?
3. Montrer que les séries $\sum_{n=1}^{+\infty}h(n)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}h(n)\ln n$ sont toutes deux convergentes.
4. Pour tout réel $x>0$ on note $\Psi(x)=\sum_{n\leq x}\dfrac{1}{n}$ et on admettra que $\Psi(x)=\ln x+R(x)$ avec $0\leq R(x)\leq 1$. Démontrer que
$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{\varphi(n)}=\sum_{d\leq x}h(d)\Psi\left(\frac{x}{d}\right).$$
5. En déduire qu'il existe une constante $C>0$ telle que, pour $x\geq 1$ réel,
$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{\varphi(n)}=C\ln x+O(1).$$
6. Montrer que $C=\dfrac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}$.