

# Postulat de Bertrand

Le Postulat de Bertrand a été énoncé par Joseph Bertrand en 1845 et démontré par Tchebychev en 1850. On présente ici la démonstration très élémentaire donnée par Paul Erdős dans son premier article<sup>1</sup> à l'âge de 19 ans. On peut aussi trouver cette preuve, en anglais, dans le livre *Proofs from THE BOOK*<sup>2</sup>.

**Théorème 1 (Postulat de Bertrand).** *Si  $n$  est un entier plus grand que 1 il existe au moins un nombre premier dans l'intervalle ouvert  $]n, 2n[$ .*

**Notation :** La notation  $\sum_p \dots$  (resp.  $\prod_p \dots$ ), représentera toujours une somme (resp. un produit) **ne portant que sur les entiers  $p$  premiers**.

## La formule de Legendre, minoration et majorations

**Définition 1.** *Soit  $p$  un nombre premier, et  $n$  un entier positif. La **valuation en  $p$**  de  $n$ , notée  $v_p(n)$  est le plus grand entier naturel  $k$  tel que  $p^k$  divise  $n$ , c'est-à-dire l'exposant de  $p$  dans la décomposition de  $n$  en produit de facteurs premiers.*

Tout entier positif  $n$  s'écrit donc comme le produit fini

$$n = \prod_{p|n} p^{v_p(n)},$$

que l'on peut, plus élégamment, écrire comme le produit infini portant sur tous les nombres premiers

$$n = \prod_p p^{v_p(n)},$$

puisque pour chaque premier  $p$  ne divisant pas  $n$ ,  $v_p(n) = 0$  et donc  $p^{v_p(n)} = 1$ .

Les deux propriétés suivantes résultent de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.

1. Pour tout  $p$  premier et tous entiers positifs  $a, b$  on a  $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$ .

---

1. P. Erdős, Beweis eines Satzes von Tschebyschef, Acta Sci. Math. (Szeged) 5 (1930-1932), 194-198 (en allemand).

2. M. Aigner and G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK* (4th ed.), Springer, 2010.

2. Pour tout  $p$  premier et tout diviseur  $b$  de l'entier  $a$ ,  $v_p(a/b) = v_p(a) - v_p(b)$ .

**Lemme 1** (Formule de Legendre). *Soit  $p$  un nombre premier, et  $n$  un entier positif. La valuation en  $p$  de  $n!$  est égale à*

$$v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^K \lfloor n/p^k \rfloor$$

où  $K = \lfloor \log(n)/\log(p) \rfloor$ .

**Lemme 2.** *Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a*

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n}. \quad (1)$$

**Démonstration:** On écrit  $4^n = 2^{2n}$ , puis par la formule du binôme

$$4^n = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{2n-1} \binom{2n}{k} + 1 = 2 + \sum_{k=1}^{2n-1} \binom{2n}{k}.$$

Puisque  $2 \leq \binom{2n}{n}$  et  $\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$  pour tout  $k$ , on a donc

$$4^n \leq \binom{2n}{n} + \sum_{k=1}^{2n-1} \binom{2n}{k} = 2n \binom{2n}{n}.$$

■

**Définition 2.** *Pour tout premier  $p$ ,  $\alpha_p = v_p\left(\binom{2n}{n}\right)$  est la valuation en  $p$  de  $\binom{2n}{n}$ , de sorte que :*

$$\binom{2n}{n} = \prod_p p^{\alpha_p}. \quad (2)$$

**Lemme 3.** *On a  $p^{\alpha_p} \leq 2n$  pour tout  $p$  et  $\alpha_p \in \{0, 1\}$  si  $p > \sqrt{2n}$ .*

**Démonstration:**

1. L'égalité  $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$  donne  $\alpha_p = v_p((2n)!) - 2v_p(n!)$ , puis, avec la formule de Legendre

$$\alpha_p = v_p((2n)!) - 2v_p(n!) = \sum_{k=1}^{K_p} \left( \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right) \quad (3)$$

où  $K_p = \lfloor \log(2n)/\log(p) \rfloor$  est la partie entière de  $\log(2n)/\log(p)$ . Remarquons de plus que la somme (3) est une somme d'entiers positifs ou nuls, car pour tout réel positif  $x$ ,  $\lfloor 2x \rfloor \geq 2 \lfloor x \rfloor$ .

2. Puisque  $\lfloor 2n/p^k \rfloor \leq 2n/p^k$  et  $\lfloor n/p^k \rfloor > n/p^k - 1$ , tous les termes de la somme (3) sont des entiers naturels strictement plus petits que  $2n/p^k - 2(n/p^k - 1) = 2$ , donc des éléments de  $\{0, 1\}$  et, puisque leur nombre est  $\lfloor \log(2n)/\log(p) \rfloor$  on a  $\alpha_p \leq \log(2n)/\log(p)$ , puis  $\log(p^{\alpha_p}) = \alpha_p \log(p) \leq \log(2n)$  soit  $p^{\alpha_p} \leq 2n$ .
3. Si  $p > \sqrt{2n}$  on a  $2n < p^2$  et  $\log(2n) < 2\log(p)$ , donc  $K_p = \lfloor \log(2n)/\log(p) \rfloor \leq 1$  (c'est 0 si  $p > 2n$ ), et la somme (3) est un élément de  $\{0, 1\}$ .

■

**Lemme 4.** *Pour  $n \geq 3$  et  $2n/3 < p \leq n$ ,  $\alpha_p = 0$ .*

**Démonstration:** Puisque  $2n/3 < p$ , on a  $3p > 2n$ , et les seuls multiples de  $p$  inférieurs ou égaux à  $2n$  sont  $p$  et  $2p$ . On a donc  $v_p((2n)!) = v_p(p) + v_p(2p) = 1 + 1 = 2$  car  $p > 2$  donne  $v_p(2p) = 1$ .

Mais  $2n/3 < p$  implique aussi  $2p > 4n/3 > n$ . Le seul multiple de  $p$  entre 1 et  $n$  est  $p$  et donc  $v_p(n!) = 1$  d'où  $\alpha_p = v_p((2n)!) - 2v_p(n!) = 2 - 2 \times 1 = 0$ . ■

**Lemme 5** (Erdős, 1932). *Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\prod_{p \leq n} p \leq 4^{n-1}$ .*

**Démonstration:** Pour  $n = 2$ ,  $\prod_{p \leq 2} p = 2 \leq 4 = 4^{2-1}$ . Soit alors  $n > 2$  un entier tel que  $\prod_{p \leq m} p \leq 4^{m-1}$  pour tout  $m$  plus petit que  $n$ .

— Si  $n$  est impair  $n = 2m + 1$ , on écrit :

$$P = \prod_{p \leq 2m+1} p = \prod_{p \leq m+1} p \prod_{m+2 \leq p \leq 2m+1} p.$$

Le deuxième produit  $Q = \prod_{m+2 \leq p \leq 2m+1} p$  est un diviseur de  $(2m+1)!$  et il est premier avec  $m!(m+1)!$  car tous ses facteurs premiers sont plus grands que  $m+1$ . Il divise donc  $\frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} = \binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$ . On en déduit  $2Q \leq \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} \leq 2^{2m+1}$  et donc  $Q \leq 2^{2m} = 4^m$ . Par hypothèse de récurrence le produit  $\prod_{p \leq m+1} p$  est lui aussi majoré par  $4^m$ , donc  $P \leq 4^m \cdot 4^m = 4^{2m} = 4^{n-1}$ .

— Si  $n$  est pair, puisque  $n$  n'est pas premier,  $P = \prod_{p \leq n-1} p$  est majoré par  $4^{n-2}$  et a fortiori par  $4^{n-1}$ .

■

## Démonstration du théorème de Bertrand

Les facteurs premiers de  $\binom{2n}{n}$  sont majorés par  $2n$ . La décomposition en facteurs premiers de  $\binom{2n}{n}$  est donc de la forme  $\binom{2n}{n} = \prod_{p \leq 2n} p^{\alpha_p}$ .

On considère donc le cas particulier d'un entier  $n$  tel qu'il n'existe aucun nombre premier dans  $\llbracket n+1, 2n-1 \rrbracket$ . La factorisation de  $\binom{2n}{n}$  se réduit alors à

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \left( \prod_{p \leq \sqrt{2n}} p^{\alpha_p} \right) \left( \prod_{\sqrt{2n} < p \leq 2n/3} p^{\alpha_p} \right) \times \left( \prod_{2n/3 < p \leq n} p^{\alpha_p} \right) \\ &\leq \prod_{p \leq \sqrt{2n}} 2n \times \prod_{\sqrt{2n} < p \leq 2n/3} p \times \prod_{2n/3 < p \leq n} p^0 \end{aligned}$$

en utilisant le lemme 3 qui majore  $p^{\alpha_p}$  par  $2n$  dans le premier produit et  $\alpha_p$  par 1 dans le deuxième produit, puis le lemme 4 qui donne  $\alpha_p = 0$  dans le troisième produit.

Puisque le nombre des nombres premiers jusqu'à  $\sqrt{2n}$  est majoré par  $\sqrt{2n}$ , on obtient ainsi, avec le lemme 5 :

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}} \prod_{\sqrt{2n} < p \leq 2n/3} p \leq (2n)^{\sqrt{2n}} \times 4^{2n/3}.$$

Le lemme de minoration (2) donne alors :  $4^n/2n \leq (2n)^{\sqrt{2n}} \times 4^{2n/3}$  soit  $4^{n/3} \leq (2n)^{1+\sqrt{2n}}$  ou encore  $(n/3) \log(4) \leq (1 + \sqrt{2n}) \log(2n)$ .

En étudiant les variations de la fonction  $f(x) = \frac{x \log 4}{3} - (1 + \sqrt{2x}) \log(2x)$  on démontre, c'est l'exercice ci-dessous, que ceci implique  $n < 468$ .

Ainsi tous les entiers  $n \geq 468$  satisfont l'assertion du théorème de Bertrand. Il reste à prouver qu'il en est de même des entiers jusqu'à 467. Il suffit pour cela, en suivant Landau<sup>3</sup>, de considérer la suite finie

$$S = 2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631,$$

dont chaque terme est un nombre premier plus petit que le double de son prédécesseur.

En effet, soit  $n$  un entier arbitraire de  $\llbracket 2, 630 \rrbracket$ ,  $q$  le plus petit entier de  $S$  plus grand que  $n$ , et  $p$  le prédécesseur de  $q$  dans  $S$ . On a alors  $p \leq n < q < 2p \leq 2n$ . Ainsi, le nombre premier  $q$  appartient à l'intervalle  $\llbracket n+1, 2n-1 \rrbracket$  et l'assertion du théorème de Bertrand est satisfaite par tous les éléments de  $\llbracket 2, 630 \rrbracket$ , ce qui termine la preuve.

---

**Exercice 1 :** Soit  $f(x) = \frac{x \log 4}{3} - (1 + \sqrt{2x}) \log(2x)$ .

---

3. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Edmund\\_Landau](https://fr.wikipedia.org/wiki/Edmund_Landau)

1. Démontrer que  $f'(x) = \frac{\log(4)}{3} - \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} - 2\frac{\log \sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$ .
  2. Démontrer que  $\log x/x$  est décroissante sur l'intervalle  $[e, +\infty[$ .
  3. En déduire que  $f'$  est croissante sur  $[e^2/2, +\infty[$ , et  $f$  croissante sur  $[142, +\infty[$ .
  4. En déduire que  $4^{n/3} > (2n)^{1+\sqrt{2n}}$  pour  $n \geq 468$ .
-