Devoir maison pour le 07/03/2008

Chacun des exercices I et II, ainsi que le problème sont indépendants du reste du sujet. La question 3 de l'exercice III utilise le résultat de l'exercice II.

Exercice I

La comète A qui est visible exactement tous les 5 ans a été observée il y a 2 ans. La comète B qui est visible exactement tous les 7 ans a été observée il y a 3 ans. La comète C qui est visible exactement tous les 13 ans a été observée il y a 8 ans. Dans combien d'années pourra-t-on observer simultanément les comètes A, B et C ?

Exercice II

On se propose de démontrer la proposition suivante : Soit $n > 0$ un entier **qui n'est pas un carré**, et $a \in \mathbb{N}$, alors il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $|u|, |v| < \sqrt{n}$ et $av \equiv u \pmod{n}$.

1. Combien y–a–t'il de couples $(u, v) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leq u < \sqrt{n}, \quad 0 \leq v < \sqrt{n}$?
2. En déduire qu'il existe $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ avec
$$0 \leq u_i < \sqrt{n}, \qquad 0 \leq v_i < \sqrt{n}, \qquad av_1 - u_1 \equiv av_2 - u_2 \pmod{n}$$
3. Conclure.

Exercice III

1. Quels sont les nombres premiers impairs p tels que -2 est un carré modulo p ?
2. Soit p premier impair tel qu'il existe x et y entiers naturels avec $p = x^2 + 2y^2$. Montrer que -2 est un carré modulo p, et en déduire que $p \equiv 1$ ou $3 \pmod{8}$.
3. Réciproquement, soit p un nombre premier, $p \equiv 1$ ou $3 \pmod{8}$, et a une solution de $a^2 \equiv -2 \pmod{p}$. Par l'exercice II, il existe une solution $(u, v) \neq (0, 0)$ de $av \equiv u \pmod{p}$, avec $|u|, |v| < \sqrt{p}$.
Montrer qu'il existe une entier k tel que $u^2 + 2v^2 = kp$, et que $k \in \{1, 2\}$. En déduire que p est de la forme $= x^2 + 2y^2$.

Problème

Soit φ la fonction d'Euler qui compte le nombre des entiers premiers avec n compris entre 1 et n. On considère la fonction f définie par

$$f(n) = \frac{1}{\varphi(n)}.$$

1. Soit $h(n) = 1/n$. Montrer que il existe une unique fonction arithmétique multiplicative g telle que $f = g \star h$, où $\star$ désigne le produit de convolution des fonctions arithmétiques.
2. Montrer que pour tout p premier, et α entier ≥ 1,

$$g(p^\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{p(p-1)} & \text{si} \quad \alpha = 1 \\ 0 & \text{si} \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

3. Montrer que, pour $\mathrm{Re}(s) > -1$, la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

est absolument convergente et exprimer sa somme comme un produit eulérien.

4. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{d=1}^{\infty} g(d)$ est convergente, de somme $\dfrac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}$.
5. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{d=1}^{\infty} g(d) \ln d$ est convergente.
6. Justifier les égalités

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d | n} g(d) \frac{d}{n} = \sum_{d \leq x} g(d) \sum_{1 \leq k \leq \frac{x}{d}} \frac{1}{k},$$

et en déduire que, quand x tend vers l'infini,

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} \sim \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \ln(x),$$

où ζ désigne la fonction de Riemann. On admettra sans démonstration que, pour tout $x \geq 1$,

$$\sum_{1 \leq k \leq x} \frac{1}{k} = \ln x + r(x), \text{ avec } 0 \leq r(x) \leq 1.$$

7. Montrer, plus précisément, que

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \ln(x) + O(1),$$

c'est à dire qu'il existe une constante A telle que, pour tout $x \geq 1$,

$$\left| \sum_{1 \leq n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} - \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \ln(x) \right| \leq A.$$