Plans projectifs, arithmétique modulaire et Dobble

M. Deléglise

27 février 2013

Résumé

Le jeu de Dobble édité par Asmodée est une excellente occasion d'introduire des objets mathématiques importants : Les plans projectifs, l'arithmétique modulaire et les nombres premiers. C'est le sujet de ce texte élémentaire à la portée d'un élève des classes secondaires.

1 Le plan affine réel

Le choix d'une origine O du plan réel et de deux axes Ox et Oy permet d'associer à tout point M du plan deux nombres réels appelés l'*abscisse* et l'*ordonnée* de M, comme indiqué sur le dessin ci-dessous. Dans la suite on écrira parfois *le point* (x, y) pour désigner le point M d'abscisse x et d'ordonnée y.

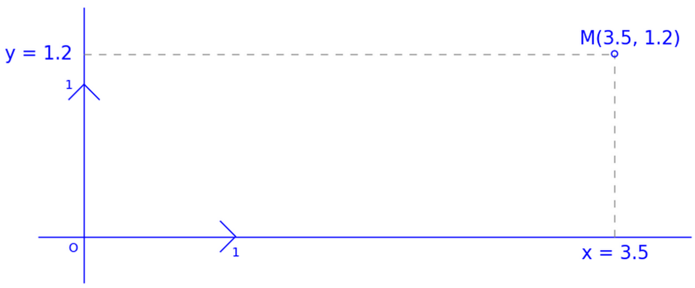

FIGURE 1 – Correspondance points $\leftrightarrow$ couples de nombres réels

Pente d'une droite non verticale. Si une droite D n'est pas verticale on calcule sa *pente* t de la manière suivante : on choisit deux points distincts $A = (x_a, y_a)$ et $B = (x_b, y_b)$ sur D. Le nombre t est alors donné par

$$t = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}. \tag{1}$$

La figure 2 donne un exemple de calcul de pente.

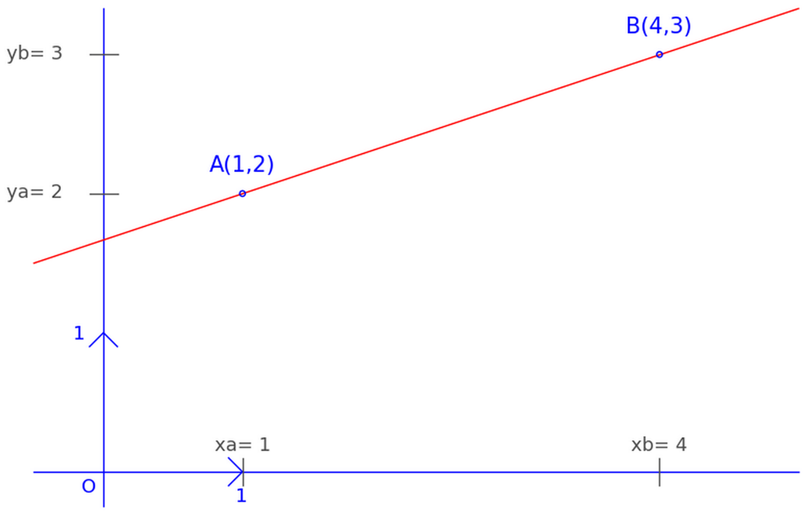

FIGURE 2 – La pente de AB est $\dfrac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \dfrac{3-2}{4-1} = \dfrac{1}{3}$

Une droite horizontale, c'est à dire parallèle à l'axe Ox a une pente 0. Une droite verticale n'a pas de pente. Par abus de langage on dit parfois qu'elle a une pente infinie. La pente de D est l'accroissement de l'ordonnée y d'un point M qui s'est déplacé le long de D en augmentant son abscisse x d'une unité. Contrairement à une erreur souvent entendue, une droite qui a pour pente $100\% = 100/100 = 1$ n'est pas une droite verticale, mais une droite qui fait un angle de 45° avec l'axe Ox.

2 Le plan projectif réel

On construit le *plan projectif réel* de la manière suivante : Pour chaque direction de droite on ajoute un nouveau point, qu'on appelle le *point à l'infini de cette direction*. Deux droites parallèles définissent donc le même point à l'infini. La figure 3 illustre cette construction. L'ensemble des points ordinaires, qu'on appelle *le plan affine*, est représenté par la surface de la mer. Les points que l'on rajoute au plan affine, pour le transformer en plan projectif, sont les points de la *ligne d'horizon*. (Sur cette figure le ciel est un décor ; ses points ne représentent pas d'objet mathématique.) Les deux droites affines de couleur noire sont transformées en droites projectives en leur adjoignant le point a. Les droites rouges sont enrichies du point b. Dans le plan affine les deux droites rouges (resp. noires) sont parallèles et n'ont pas de point commun. Dans le plan projectif elles se coupent en a (resp. b).

Les droites du plan projectif sont donc les droites du plan affine, chacune enrichie du point à l'infini de sa direction. À ces droites on rajoute la droite dont les éléments sont tous les points à l'infini, c'est à dire la ligne d'horizon.

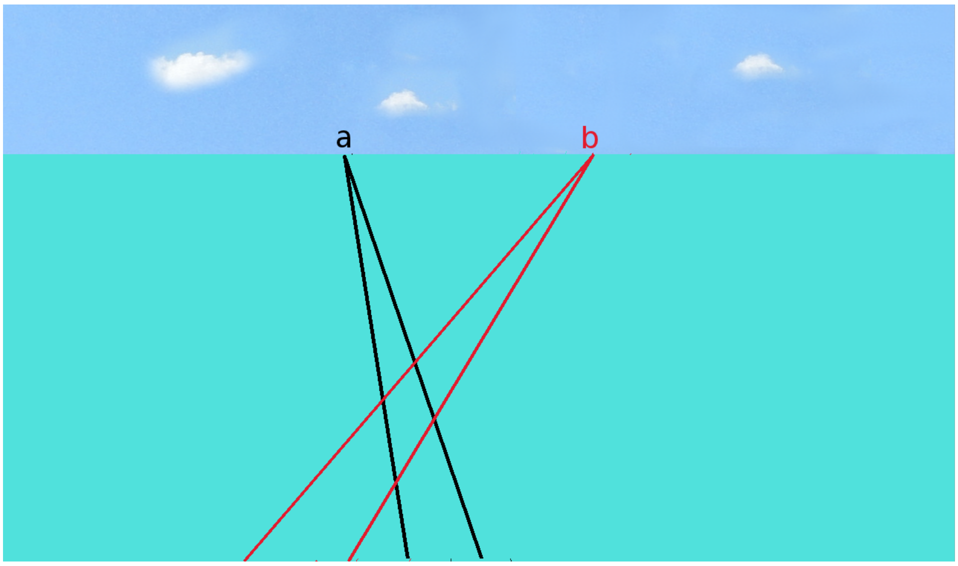

FIGURE 3 – Le plan affine complété par une droite à l'infini

Le plan projectif jouit de la propriété suivante :

Proposition 1

1. *Par deux points distincts, il passe une droite et une seule.*
2. *Deux droites distinctes se coupent toujours en exactement un point.*

Essayez de démontrer cette propriété. Pour démontrer l'assertion 1) vous considérerez 3 cas : a) Les deux points sont dans le plan affine, b) l'un des deux est à l'infini, l'autre dans le plan affine et c) les deux points sont à l'infini. Pour l'assertion 2) vous considérerez les cas : a) L'une des deux droites est la droite à l'infini, b) Les deux droites n'ont pas de point commun dans le plan affine, et c) les deux droites ont un point commun dans le plan affine.

On note $P_2(\mathbb{R})$ le plan projectif que l'on vient de définir. La lettre P est la première lettre du mot projectif, l'indice 2 indique que l'objet que l'on vient de construire est de dimension 2, donc un plan, et la lettre $\mathbb{R}$ est le symbole qui représente l'ensemble des nombres réels.

3 Le corps $\mathbb{F}_5$ des entiers modulo 5

$\mathbb{F}_5$ est l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. L'addition de $\mathbb{F}_5$ est définie de la manière suivante : Pour calculer $a + b$ on calcule la somme ordinaire $a + b$, mais si le résultat est supérieur ou égal à 5 on en retranche 5. Par exemple : $1+2 = 3$ et $3+4 = 7-5 = 2$. Cette opération est appelée l'*addition modulo*

FIGURE 4 – Tables d'addition et de multiplication de $\mathbb{F}_5$

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\times$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

5. On définit la multiplication sur $\mathbb{F}_5$ de manière semblable : Pour calculer le produit de a par b on calcule d'abord de produit ordinaire, et, si le résultat est supérieur ou égal à 5 on le remplace par le reste de sa division par 5. Ainsi $3 \times 4 = 12 - 10 = 2$. On appelle cette opération la *multiplication modulo* 5. Avec ces 2 opérations $\mathbb{F}_5$ satisfait les propriétés suivantes :

Proposition 2 *Soit* $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *muni de l'addition et de la multiplication modulo* 5*. Alors*

1. *Chaque nombre* x *a un unique* opposé*, c'est à dire un nombre qui, ajouté à* x*, donne* 0*. On note ce nombre* $-x$*.*
2. *Chaque* x *non nul a un unique* inverse*, c'est à dire un nombre qui, multiplié par* x*, donne* 1*. On note ce nombre* $1/x$*.*

On peut vérifier sur les tables d'addition et de multiplication de la figure 4 l'existence et l'unicité de l'opposé de x, et de son inverse lorsque $x \neq 0$. La figure 5 donne la table des opposés de éléments de $\mathbb{F}_5$ et la table des inverses des éléments non nuls.

FIGURE 5 – Tables des opposés et des inverses dans $\mathbb{F}_5$

x	0	1	2	3	4
-x	0	4	3	2	1

x	1	2	3	4
1/x	1	3	2	4

La soustraction dans $\mathbb{F}_5$. On définit $a - b$ comme la *somme de* a et de l'*opposé* de b, opposé que l'on trouve dans la tables des opposés de la figure 5. Par exemple

$$2 - 3 = 2 + (-3) = 2 + 2 = 4.$$

La division dans $\mathbb{F}_5$. Lorsque b n'est pas nul on définit $\frac{a}{b}$ comme le produit $a \times (1/b)$ de a par l'inverse de b. Choisissons par exemple $a = 2$ et $b = 3$. La table des inverses de la figure 5 nous dit que l'inverse de 3 est 2. Donc

$$\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3} = 2 \times 2 = 4.$$

FIGURE 6 – Tables d'addition et de multiplication modulo 6

$+$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$\times$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

4 Le corps $\mathbb{F}_p$

On rappelle qu'un entier $p > 1$ est un *nombre premier* si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p. Euclide a démontré, il y a environ 2300 ans, qu'il existe une infinité de nombres premiers. Il y a 15 nombres premiers plus petits que 50, les nombres $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$.

Pour tout nombre premier p, la proposition 2 est encore vraie en y remplaçant l'ensemble $\mathbb{F}_5$ par l'ensemble $\mathbb{F}_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ et l'addition et la multiplication modulo 5 par l'addition et la multiplication modulo p (on effectue l'addition ou la multiplication ordinaire, et, lorsque le résultat est supérieur ou égal à p, on le remplace par le reste de sa division par p).

Remarque. Rien n'empêche de définir l'addition et la multiplication modulo n lorsque n n'est pas premier, mais, dans ce cas, la propriété 2 de la proposition 2 est fausse. Par exemple, pour $n = 6$ qui n'est pas premier, puisque $6 = 2 \times 3$, dressons les tables d'addition et de multiplication modulo 6 (cf. figure 6). On voit sur la table de multiplication que seuls 1 et 5 admettent un inverse. En particulier, modulo 6, on ne peut pas diviser par $2, 3$ et 4 parce que ces nombres n'ont pas d'inverse.

5 Géométrie affine sur $\mathbb{F}_5$

Comme nous l'avons fait dans le cas des nombres réel (cf. figure 1), à tout couple (x, y) d'éléments de $\mathbb{F}_5$ on associe un poin du plan affine sur $\mathbb{F}_5$. Puisque $\mathbb{F}_5$ a 5 éléments, le plan affine sur $\mathbb{F}_5$ a $5 \times 5 = 25$ points. Ces points sont les petits disques rouges sur la figure 7.

Les verticales et les horizontales. Pour chaque abscisse $x = 0, 1, 2, 3, 4$ il y a une droite verticale d'abscisse x, et pour chaque ordonnée $y = 0, 1, 2, 3, 4$ une horizontale d'ordonnée y. Chacune de ces droites est composée de 5 points, et on les reconnait facilement sur la figure 7.

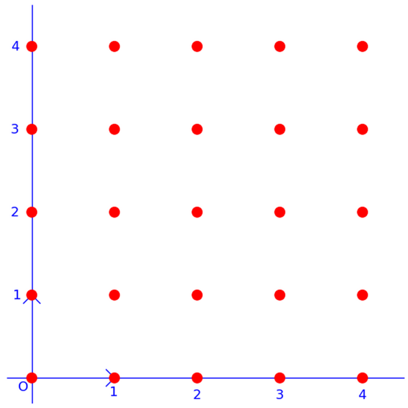

FIGURE 7 – Les 25 points du plan affine sur $\mathbb{F}_5$

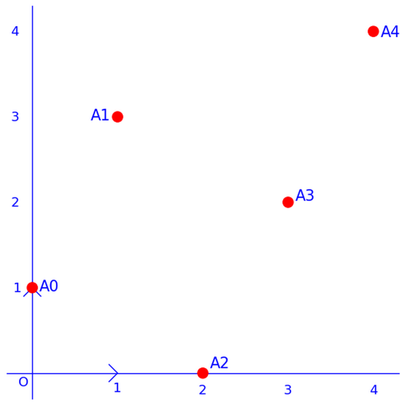

FIGURE 8 – La droite D_1, de pente 2, passant par $A_0 = (0, 1)$

Les droites de pente non nulle. Intéressons nous maintenant aux droites qui ne sont ni horizontales ni verticales. Considérons par exemple la droite D_1 qui passe par le point $A_0 = (0, 1)$ et dont la pente est 2. Notons A_1, A_2, A_3, A_4 les points de cette droite d'abscisses $1, 2, 3, 4$. Puisque la pente est 2, lorsqu' on se déplace sur cette droite, chaque fois que l'abscisse x augmente de 1, l'ordonnée y augmente de 2. Autrement dit, si (x, y) sont les coordonnées de A_i, celles de A_{i+1} sont $(x + 1, y + 2)$, *en n'oubliant pas que le signe* + *représente l'addition modulo* 5. Ainsi les coordonnées des A_i sont données par

$$A_0 : (0, 1),\ A_1 : (1, 3),\ A_2 : (2, 0),\ A_3 : (3, 2),\ A_4 : (4, 4)$$

Ces point sont représentés sur la figure 8. Cet ensemble de points ne ressemble guère à un ensemble de points alignés au sens usuel de ce mot. Et pourtant ils sont bien tous sur une même droite. Vérifions le en calculant les pentes des segments qui joignent deux de ces points. Il y a 10 paires de points A_i, A_j, nous n'en considérerons que 3. Le lecteur pourra vérifier qu'on obtient le même résultat avec les autres paires.

Nous utilisons pour ce calcul la formule (1) de la page 1, qui donne la pente d'une droite du plan ordinaire. Mais au lieu d'utiliser la soustraction et la division des nombres ordinaires nous utiliserons la soustraction et la division dans $\mathbb{F}_5$.

$$A_0A_3 : \quad \text{Pente } \frac{2-1}{3-0} = \frac{1}{3} = 2.$$

$$A_0A_4 : \quad \text{Pente } \frac{4-1}{4-0} = \frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4} = 3 \times 4 = 2.$$

$$A_0A_2 : \quad \text{Pente } \frac{0-1}{2-0} = \frac{-1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Comme dans le cas réel, deux droites de pentes distinctes se coupent en un point unique. Vérifions le sur un exemple en considérant une autre droite, la droite D_2 qui passe par le point $B_0 = (0,2)$ et dont la pente est 1. Soit B_i le point d'abscisse i sur D_2. Puisque la pente est 1, on passe des coordonnées de B_i à celles de B_{i+1} par la transformation $(x,y) \mapsto (x+1, y+1)$, et on obtient :

$$B_1 = (1,3),\ B_2 = (2,4),\ B_3 = (3,0),\ B_4 = (4,1).$$

La figure 9 montre les 2 droites D_1 et D_2. On vérifie qu'elles ont un point commun, le point $A_1 = B_1 = (1,3)$.

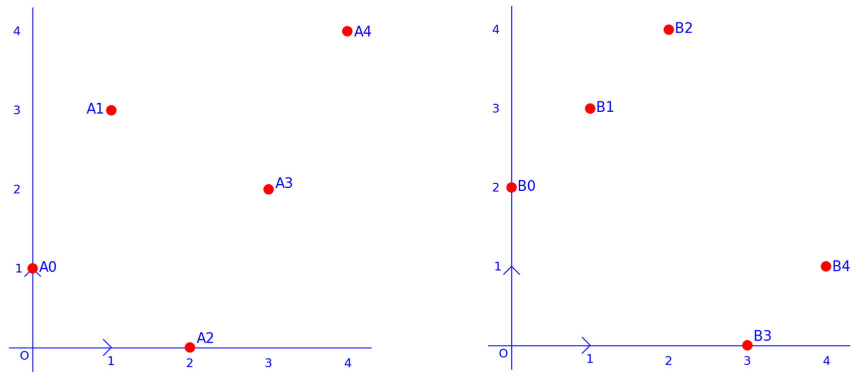

FIGURE 9 – A gauche D_1, à droite D_2, de pente 1, passant par $B_0 = (2,0)$

6 Le plan projectif $P_2(\mathbb{F}_5)$ sur $\mathbb{F}_5$

Dans le §2, nous avons construit le plan projectif réel à partir du plan affine réel. Dans cette section nous construisons, de la même manière, le plan

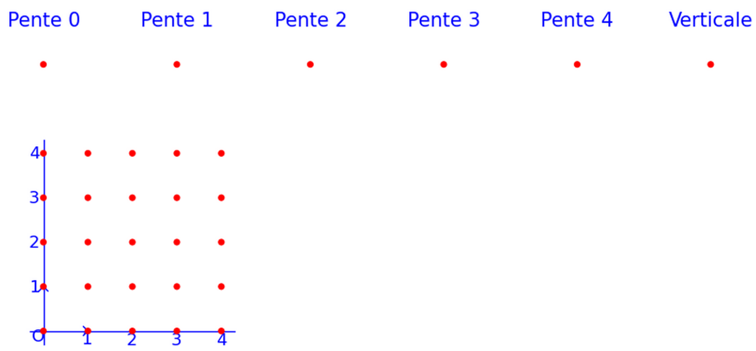

FIGURE 10 – Une représentation des 31 points du plan projectif sur $\mathbb{F}_5$

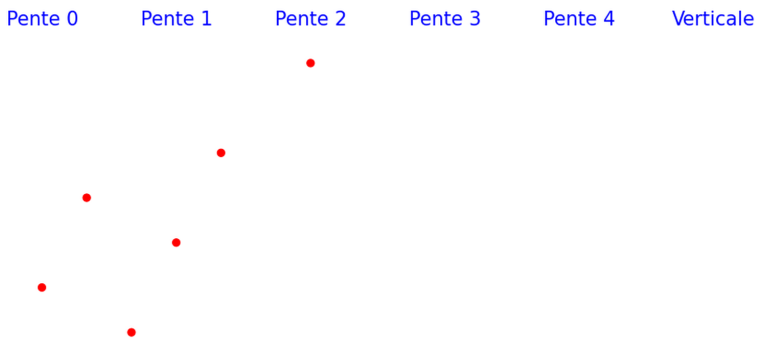

FIGURE 11 – Les 6 points de la droite projective associée à D_1.

projectif sur $\mathbb{F}_5$ à partir du plan affine sur $\mathbb{F}_5$, en rajoutant un point à l'infini pour chaque direction de droite du plan affine. Dans le plan réel il y a une infinité de directions, car il y a une infinité de pentes, donc une infinité de points à l'infini. Dans le plan affine sur $\mathbb{F}_5$, outre la direction verticale, il y a 5 pentes possibles, les pentes $0, 1, 2, 3, 4$. Ceci donne 6 directions de droites affines, donc 6 points à l'infini, les points que nous nommerons

verticale, pente 0, pente 1, pente 2, pente 3, pente 4.

La figure 10 donne une représentation des points du plan projectif sur $\mathbb{F}_5$. Il contient les représentations des 25 points du plan affine, et les 6 points à l'infini correspondant aux 6 directions possibles d'une droite affine.

L'ensemble des 6 points à l'infini est la droite à l'infini du plan projectif. Les autres droites du plan projectif sont constituées d'une droite du plan affine, à laquelle on ajoute le point à l'infini associé à sa direction.

Soit D_1 la droite du plan affine sur $\mathbb{F}_5$ représentée sur la figure 8 ou encore à gauche de la figure 9. Puisque la pente de D_1 est 2, les points de la projective associée à D_1 sont les points de D_1, auxquels on rajoute le point à l'infini défini par la pente 2. Cette droite projective est représentée sur la figure 11.

7 Le plan projectif $P_2(\mathbb{F}_p)$

Si p est un nombre premier quelconque, on construit le plan projectif $P_2(\mathbb{F}_p)$ exactement comme nous avons construit $P_2(\mathbb{F}_5)$, en remplaçant 5 par p. Chaque droite du plan affine sur $\mathbb{F}_p$ a p points, chaque droite projective en a donc $p+1$.

Le plan affine a $p \times p = p^2$ points. Il y a p pentes possibles pour les droites non verticales, plus la pente infinie pour la verticale, donc $p+1$ directions possibles pour les droites, donc $p+1$ points à l'infini. Ce plan projectif contient donc p^2+p+1 points. Démontrons que le nombre des droites et aussi p^2+p+1.

1. Il y a p droites affines verticales : les verticales d'abscisses x pour $x = 0, 1, 2, \ldots, p-1$.
2. Il y a p^2 droites affines non verticales : une telle droite est caractérisée par sa pente $t \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, et par le point $(0, y)$ où elle rencontre l'axe Oy avec $y \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ (elle le rencontre puisqu'elle n'est pas verticale).
3. La droite à l'infini.

8 Application au jeu de *Dobble*

Dobble est un jeu de société, édité par Asmodée. Ce jeu est constitué de 55 cartes, sur lesquelles sont dessinées 8 images. La propriété remarquable de ces cartes est la suivante : *pour toute paire de cartes, il existe une image et une seule qui figure sur ces deux cartes.* La figure 12 représente une paire de cartes. On peut jouer de plusieurs manières, mais dans tous les cas, il s'agit,

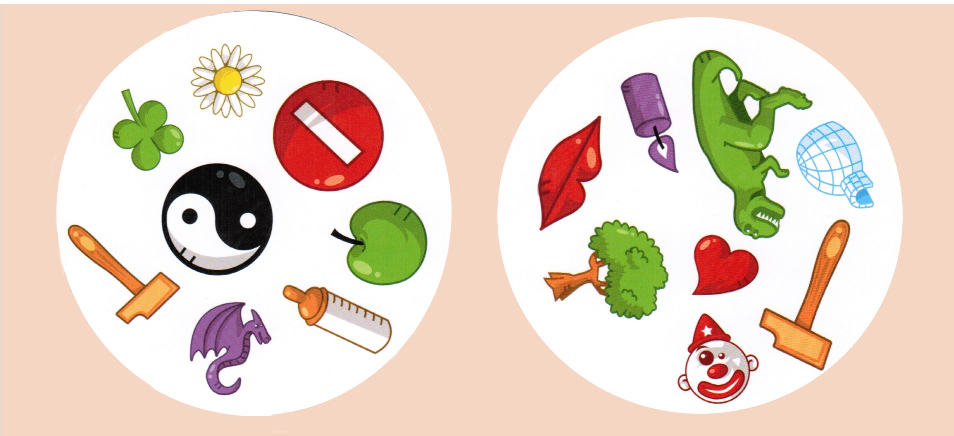

Figure 12 – Paire de cartes de Dobble : l'unique image figurant sur ces deux cartes est le marteau.

pour chacun des joueurs, de trouver le plus rapidement possible l'image commune au deux cartes situées devant lui.

La propriété *pour toute paire de cartes, il existe une image et une seule qui figure sur ces deux cartes* nous fait penser à la propriété fondamentale des droites d'un plan projectif : *Etant données deux droites du plan projectif, il existe un seul point appartenant à ces deux droites.*

Construire un jeu à N images. Supposons que l'on dispose d'un plan projectif fini avec N points. Prenons par exemple $N = 31$, qui est le nombre de points du plan projectif $P_2(F_5)$. On construit un jeu à 31 images de la manière suivante :

On numérote de 1 à 31 les 31 images que l'on veut disposer sur les cartes du jeu, ainsi que les points du plan. La figure 13 montre une numérotation des points du plan.

Pour chacune des 31 droites D de $P_2(\mathbb{F}_5)$ on fabrique alors une carte en imprimant sur cette carte les images dont les numéros sont les numéros des 6 points de D.

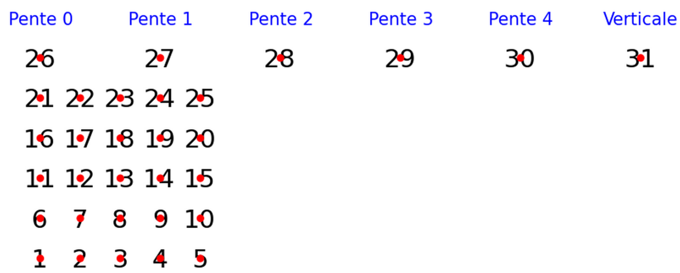

FIGURE 13 – Numérotation des 31 points du plan projectif modulo 5

Construisons, par exemple, la carte associée à la droite projective D_1. Les points de D_1 sont les points de coordonnées $(0, 1), (1, 3), (2, 0), (3, 2), (4, 4)$ et le point à l'infini **Pente 2**. Avec la numérotation de la figure 13, les numéros de ces points sont $(6, 17, 3, 14, 25, 28)$. La carte associée à D_1 est donc la carte sur laquelle figure les images de numéros $3, 6, 14, 17, 25$ et 28.

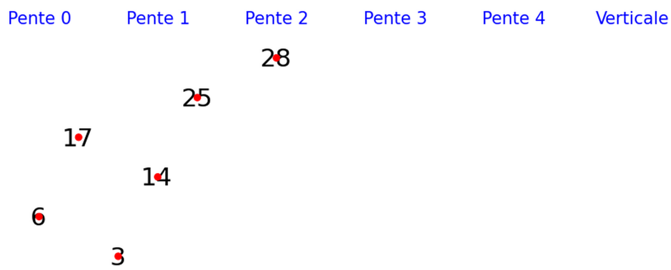

FIGURE 14 – Les numéros des points de la droite D_1.

FIGURE 15 – Deux cartes d'un jeu à 133 images et 12 images par carte. On a associé une image à chacun des 133 points du plan projectif $P_2(\mathbb{F}_{11})$. Chaque carte contient les images des 12 points d'une droite du plan projectif.

Le jeu de Dobble commercialisé par Asmodée est obtenu pour $p = 7$. L'espace projectif $P_2(\mathbb{F}_7)$ contient $7^2 + 7 + 1 = 57$ points, et 57 droites. Chaque droite affine contient 7 points, et donc chaque droite projective contient chacune $7 + 1 = 8$ points. Ceci permet de construire un jeu de 57 cartes avec chacune 8 images. Curieusement, ce jeu ne contient que 55 cartes.

Choisissant le nombre premier suivant $p = 11$ on obtient un plan projectif à $11^2 + 11 + 1 = 133$ points, qui, avec 133 images, permet de fabriquer un jeu de 133 cartes contenant chacune $11+1 = 12$ images. La figure 15 montre 2 cartes d'un tel jeu.

Complément. Un autre article consacré à ce jeu : Maxime Bourrigan, *Dobble et la géométrie finie*, sur le site *Image des Mathématiques* du CNRS. http ://images.math.cnrs.fr/Dobble-et-la-geometrie-finie.html